

24 级数学 I 复习资料

王昱栋 傅雨辰 编

一、集合论

1.1 集合与子集合

略

1.2 集合的运算

并集、交集、补集、差集

定律：交换律、结合律、分配律、摩根律

试证明分配律：

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

试证明摩根律：

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$$

思考题： A, B, E 是全集 X 的子集，试证：

$$B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \text{ 当且仅当 } B^c = E$$

设 X, Y 是两个集合，称一切元素的有序对 (x, y) （其中 $x \in X, y \in Y$ ）形成的集合叫做 X, Y 的**直积集**，记作 $X \times Y$ 。

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

以上的所有定义亦可推导至 n 维欧式空间。

1.3 映射与基数

映射 part

映射的基础定义略。明确像、原像、像集、原像集的概念。

单射： 映射 $f: X \rightarrow Y$ 是单射的当且仅当对于任意 $x_1, x_2 \in X$ ，若 $x_1 \neq x_2$ ，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。**满射：** 若对每一个 $y \in Y$ ，均有 $x \in X$ ，使得 $f(x) = y$ ，则称映射 $f: X \rightarrow Y$ 为满射。**双射：** 若 $f: X \rightarrow Y$ 是单射，且 $f: Y \rightarrow X$ 是满射，则称 f 为双射。**逆映射：** 若 $f: X \rightarrow Y$ 是双射，则 f 存在逆映射，并称 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 为 f 的逆映射。

思考题：

1. $f: X \rightarrow Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B \subset Y$ ，有

$$f(f^{-1}(B)) = B$$

2. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ ，若对任意的 $x \in X$ ，必有 $g(f(x)) = x$ ，则 f 必为单射， g 必为满射。

X 为非空集合，则由 X 的一切子集组成的集合称为 X 的**幂集**，记为 $\mathcal{P}(X)$ 。

基数 part

对等： 设集合 A, B 存在一个从 A 到 B 上的一一映射，则称 A 与 B 是**对等**的。记为 $A \sim B$ 。**Banach 引理** (集合在映射下的分解)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ ，则存在分解：

$$X = A \cup A', Y = B \cup B', \text{ 其中 } f(A) = B, g(B') = A', A \cap A' = \emptyset, B \cap B' = \emptyset.$$

Cantor-Bernstein 定理 假设 A, B 是非空集合, 并且存在从 A 到 B 的一一映射 $f: A \rightarrow B$, 以及从 B 到 A 的一一映射 $g: B \rightarrow A$, 则 A, B 是对等的.

阿贝尔 (Abel) 变换 略

无限集的基数: $\aleph_0$ (可列集: 整数集, 有理数集) $\aleph_1$ (不可列集: 实数集) $\aleph_2$ (不可列集: 复数集)

思考题: $\mathbb{R}$ 中互不相交的开区间族是可数集。

(ps. 可数集是有限集和可列集的合称。)

二、不等式

2.1 著名不等式

2.1.1 三角不等式:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

proof.

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\ &\leq x^2 + y^2 + 2|x||y| \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

2.1.2 Cauchy 不等式

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{当且仅当 } x \parallel y \text{ 取等}$$

proof. Consider $f(t) = \|x - ty\|^2 = \|y\|^2 t^2 - 2(x \cdot y)t + \|x\|^2$.

$$\Delta = 4(x \cdot y)^2 - 4\|x\| \|y\| \geq 0 \Rightarrow |x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

均值不等式 (AM-GM): $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ 时,

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

凸函数:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ 凸函数}$$

Def. $\forall x, y \in I, t \in (0, 1)$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

2.1.3 Jensen 不等式

f 是凸函数, $x_i \in I, t_i \in (0, 1), \sum t_i = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

proof. 当 $n = 2$ 时, 即凸函数定义。当对于 n 成立时,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^{n+1} t_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=0}^n t_i x_i + t_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left((1-t_{n+1}) \sum_{i=0}^n \frac{t_i}{1-t_{n+1}} x_i + t_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &\leq (1-t_{n+1}) f\left(\sum_{i=0}^n \frac{t_i}{1-t_{n+1}} x_i\right) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{i=0}^n t_i f(x_i) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} t_i f(x_i) \end{aligned}$$

即对于 $n+1$ 成立。

2.1.4 加权均值

$a_i > 0, t_i \in (0, 1)$ 时,

$$a_i^{t_i} a_2^{t_2} \cdots a_n^{t_n} \leq t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_n a_n$$

proof. lemma. $-\ln x$ 凸. 令 $\frac{x_1}{x_2} = t$,

$$\begin{aligned} \lambda \ln x_1 + (1-\lambda) \ln x_2 &\leq \ln(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \\ \Leftrightarrow x_1^\lambda x_2^{1-\lambda} &\leq \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \\ \Leftrightarrow \phi(\lambda) = t^\lambda - \lambda t - 1 + \lambda &\leq 0 \\ \phi'(1) &= 0 \end{aligned}$$

可证, $\lambda = 1$ 处, $\phi(\lambda)$ 有最大值 0.

Young 不等式: $a, b > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 0$ 时,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

proof.

$$(a^p)^{1/p} (b^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

p-范数:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

2.1.5 Holder 不等式

$x_i, y_i > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k y_k &\leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q} \\ x \cdot y &\leq \|x\|_p \|y\|_q \end{aligned}$$

proof. 设

$$A = \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p}, \quad B = \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q},$$

若 $A = 0$ 或 $B = 0$, 则所有 $x_k = 0$ 或所有 $y_k = 0$, 不等式显然成立 (两边为 0)。因此, 不妨假设 $A > 0, B > 0$ 。设

$$u_k = \frac{x_k}{A}, \quad v_k = \frac{y_k}{B}.$$

则

$$\sum_{k=1}^n u_k^p = \frac{1}{A^p} \sum_{k=1}^n x_k^p = 1, \quad \sum_{k=1}^n v_k^q = \frac{1}{B^q} \sum_{k=1}^n y_k^q = 1.$$

对于每个 k , 有

$$u_k v_k \leq \frac{u_k^p}{p} + \frac{v_k^q}{q}.$$

求和后得到

$$\sum_{k=1}^n u_k v_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n u_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n v_k^q = \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = 1.$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k y_k}{AB} \leq 1.$$

也就是

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq AB = \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q}.$$

2.1.6 Minkowski 不等式

$a_i, b_i > 0, p > 1$ 时,

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_i^p \right)^{1/p}$$

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

proof.

由赫尔德不等式

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1-1/p} \\ \sum_{k=1}^n b_i (a_i + b_i)^{p-1} &\leq \left(\sum_{k=1}^n b_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1-1/p} \end{aligned}$$

相加得,

$$\sum_{k=1}^n (a_i + b_i)^p \leq \left(\sum_{k=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1-1/p} \left[\left(\sum_{k=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_i^p \right)^{1/p} \right]$$

即,

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_i^p \right)^{1/p}$$

这部分的考察方式大概是著名不等式的掌握与熟练运用, 会直接考察以上不等式的证明, 但最好也要会证。

三、数学分析

3.1 实数系的连续性

请读者自证以下定理：（有能力的同学可以尝试互证）

确界存在原理

有限覆盖定理

闭区间套定理

单调有界原理

柯西收敛准则

聚点定理/致密性定理/Bolzano-Weierstrass 定理

戴德金定理

OK，你已经掌握实分析的大部分内容了。

来道小题：证明 $\sqrt{6}$ 不是有理数。

3.2 数列极限

3.2.1 数列的极限

数列 a_n 收敛于 a ，记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 其符号表述为：

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ 使得对于任意的 } n \geq N, \text{ 成立 } |a_n - a| < \epsilon.$$

思考题：

1. 设 $a > 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

2. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$$

3.2.2 数列极限的性质

（1）极限的**唯一性**

定理 3.2.1 收敛数列的极限必唯一.

（2）数列的**有界性**

定理 3.2.1 收敛数列必有界.

（3）数列的**保序性**

定理 3.2.3 设数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 均收敛, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 且 $a < b$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$x_n < y_n.$$

（4）极限的**夹逼性**

定理 3.2.4 若三个数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 从某项开始成立

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \quad n > N_0,$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

拓展定理: **Stolz 定理**

3.2.3 数列极限的四则运算

定理 3.2.5 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha a \pm \beta b;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

以上五条定理读者自证不难。

思考题:

1. 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$.

2. 设 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = a$$

3.3 收敛准则

常用的判断数列收敛的准则: **单调有界原理、柯西收敛准则、Bolzano-Weierstrass 定理**

经典例题:

例 1. 记 $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, 证明数列 $\{b_n\}$ 收敛。

证: 由 $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 由此得到 $\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$. 于是有

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} > 0,$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} < 0,$$

故数列 $\{b_n\}$ 有下界 0。

3.4 上极限与下极限

给定无穷数列 $\{x_n\}$, 它的一切收敛子数列的极限值的上确界值, 称为该无穷序列的上极限。或定义为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup x_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup \{x_n : n > N\}$. 下极限同理。

定理: 上下极限属于该数列的极限点集。

上下极限的运算

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$$

读者自证不难。

3.5 函数极限

3.5.1 函数极限的性质

函数 f 在 x_0 处的函数极限定义为:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - x_0| < \delta) \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

(1) 极限的**唯一性**

若 $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, 则 $A = B$

(2) **局部保序性**

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且 $A > B$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得对于任意的 $x (0 < |x - x_0| < \delta)$, 有 $f(x) > g(x)$.

(3) **夹逼性**

若存在 $r > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < r$ 时, 成立

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$.

3.5.2 函数极限的四则运算

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \alpha A \pm \beta B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = A \times B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$$

读者自证不难。

3.5.3 函数极限与数列极限的关系

Heine 定理

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 存在的充要条件是:

取 $f(x)$ 定义域内的任意数列 $\{a_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 a_n 不等于 a , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$.

Heine 定理的柯西收敛准则:

读者自证不难。