

数学 1

题 1 (10 分). 设函数 $f(x) = e^x - ax - a^3$, 其中 a 为实数。若 $f(x)$ 的极小值小于零, 求实数 a 的取值范围。

题 2 (15 分). 已知 $f: A \rightarrow B$ 可逆, $g: B \rightarrow C$ 可逆, 证明: $g \circ f$ 可逆, 且:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

题 3 (15 分). 证明

$$|x \cdot y| \leq |x|_p |y|_q$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

题 4 (15 分). 用实数连续性公理证明确界原理

题 5 (15 分). 证明单调有界原理: 单调递增且有上界的数列必收敛.

题 6 (15 分). 设 $\{x_n\}$ 为数列, $a \in \mathbb{R}$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{当且仅当} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

题 7 (20 分). 证明函数极限的归并原理 (*Heine* 定理): 设 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 D 的聚点, 则以下命题等价:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$
2. 对任意满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ 的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$