

数学 II 每周一练习题集



少学组

2026 年 5 月

数学 II

供题人：少年班 2405 张洛宁 2026 年 03 月 28 日

难度：二星

注：本题适合预科二正在学习《数学 II》的同学食用。

1. ① 证明：若 $f(x)$ 是连续函数，则 $F(x)=|f(x)|$ 也是连续函数。
② 研究 ① 中命题的逆命题的真伪。

证明：① 由 f 在 x_0 连续知，对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

根据绝对值不等式

$$||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|,$$

于是当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

$$||f(x)| - |f(x_0)|| < \varepsilon.$$

因此 $|f|$ 在 x_0 处连续。若 f 在区间 I 上连续，则 $|f|$ 也在 I 上连续。

② 假，考虑迪利克雷函数的变形：

$$f(x) = \chi(x) - \frac{1}{2}$$

它仍是处处不连续的函数，但 $|f(x)|$ 确是恒等于 $\frac{1}{2}$ 的常函数，处处连续。 $\square$

2. 证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

证明: 用反证法证明。假设 f 在 $[a, b]$ 上无界, 则对任意正整数 n , 存在 $x_n \in [a, b]$, 使得

$$|f(x_n)| > n.$$

由 $\{x_n\}$ 是有界数列, 根据 Bolzano-Weierstrass 定理, 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设其极限为 $x_0 \in [a, b]$ (因为闭区间是闭集)。由于 f 在 x_0 处连续, 故 $\{f(x_{n_k})\}$ 收敛于 $f(x_0)$, 从而 $\{f(x_{n_k})\}$ 有界。但由构造, $|f(x_{n_k})| > n_k \rightarrow +\infty$, 矛盾。因此假设不成立, f 在 $[a, b]$ 上有界。 $\square$

3. 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续, 且 $x_1, x_2, \dots$ 为此区间中的任意值, 则在他们中间可找到一个数值 ξ , 使得:

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

证明: 不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$ 其中不全成立等号, 函数值也不全相等。于是存在下标 $i \neq j \in 1, 2, 3, \dots, n$, 使得如下定义的 M, m 满足 $m < M$:

$$f(x_i) = m = \min f(x_1), \dots, f(x_n)$$

$$f(x_j) = M = \max f(x_1), \dots, f(x_n)$$

以下不妨假设 $x_i < x_j$

$$\text{令 } A = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

$$\text{令 } F(x) = f(x) - A$$

问题已归结为证明 F 在区间 $[x_1, x_n]$ 上有零点。

由于 $f(x_i) = m < A$ 和 $F(x_j) = M > A$, 因此得到

$F(x_i) = f(x_i) - A = m - A < 0, F(x_j) = M - A > 0$ 根据连续函数的零点存在定理, $F(x)$ 在区间 $[x_i, x_j]$ 上有零点。将它记为 ξ , 就得到在点 $x_1, \dots, x_n$ 之间的点 ξ , 使得 $f(\xi) = A$ □

4. $f(1)=0, f'(1)$ 存在, 求: $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \tan 3x}{\ln(1+x^2) \sin x}$

解: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 利用等价无穷小:

$$\sin x \sim x, \quad \tan 3x \sim 3x, \quad \ln(1+x^2) \sim x^2.$$

故

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) 3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2}$$

考虑到需要利用 $f'(1)$, 尝试构造其关系

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3[f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)]}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2}$$

其中

$$\sin^2 x + \cos x - 1 = \sin^2 x - (1 - \cos x) \sim x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

因此

$$I = 3f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}f'(1).$$

数学 II

供题人：少年班 2403 王昱栋 2026 年 04 月 04 日

难度：二星

注：本题适合预科二正在学习《数学 II》的同学食用。

1. 设 $0 < a < b$ ，证明：

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

证明：考虑函数 $f(x) = \ln x$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导。由拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\ln b - \ln a = f'(\xi)(b-a) = \frac{1}{\xi}(b-a),$$

即

$$\ln \frac{b}{a} = \frac{b-a}{\xi}.$$

由于 $a < \xi < b$ ，有 $\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$ ，乘以 $b-a > 0$ 得

$$\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{\xi} < \frac{b-a}{a},$$

即

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

证毕。

2. 设 $0 < a < b$, 证明:

$$(ae)^{b-a} < \frac{b^b}{a^a} < (be)^{b-a}.$$

证明: 对不等式取自然对数, 等价于证明

$$(b-a)(1+\ln a) < b\ln b - a\ln a < (b-a)(1+\ln b).$$

令 $f(x) = x\ln x$, 则 $f'(x) = \ln x + 1$. 在 $[a, b]$ 上应用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$b\ln b - a\ln a = f'(\xi)(b-a) = (\ln \xi + 1)(b-a).$$

由于 $\ln x + 1$ 严格递增, 且 $a < \xi < b$, 故

$$\ln a + 1 < \ln \xi + 1 < \ln b + 1.$$

乘以 $b-a > 0$ 即得所需不等式。证毕。

3. 设 f 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

证明: 存在 $\xi \in (a, +\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

证明: 若 $f(x) \equiv A$, 则任意 ξ 均满足 $f'(\xi) = 0$, 结论平凡成立。否则, 存在 $x_0 \in (a, +\infty)$ 使得 $f(x_0) \neq A$ 。不妨设 $f(x_0) > A$ (若 $f(x_0) < A$ 可类似讨论)。由极限条件, 存在 $c_1 \in (a, x_0)$ 使得 $f(c_1) < f(x_0)$, 以及 $c_2 \in (x_0, +\infty)$ 使得 $f(c_2) < f(x_0)$ 。于是 f 在 $[c_1, c_2]$ 上连续, 最大值在内部点 x_0 处达到 (不是端点), 由费马引理, 存在 $\xi \in (c_1, c_2) \subset (a, +\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 。证毕。

4. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, x_0 是 f 在 (a, b) 内唯一的极值点。证明: 若 x_0 是极大(小)值点, 则 x_0 是 f 在 $[a, b]$ 上的最大(小)值点。

证明: 假设 x_0 是唯一的极大值点。若 x_0 不是最大值点, 则存在 $x_1 \in [a, b]$ 使得 $f(x_1) > f(x_0)$ 。由于 x_0 是极大值点, 存在邻域 $U(x_0)$ 使得 $f(x) \leq f(x_0)$ 对 $x \in U(x_0)$ 成立, 故 $x_1 \notin U(x_0)$ 。考虑区间 $[a, x_0]$ 和 $[x_0, b]$, 由 f 连续, 最大值在闭区间上达到。若最大值在端点 a 或 b 达到, 则存在另一极值点(因为从 x_0 到端点的连续函数必须经过一个转折点), 矛盾。若最大值在内部某点 $x_2 \neq x_0$ 达到, 则 x_2 也是极大值点, 与唯一性矛盾。因此 x_0 必为最大值点。对极小值情况同理可证。证毕。

数学 II (含解答)

供题人：少年班 2407 吴悠 2026 年 04 月 11 日

注意：题目难度可能乱序，这因人而异。

1. 求极限：

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^x - e^e}{x - e}.$$

解. 令 $f(x) = x^x$. 根据导数定义, 该极限即为 $f(x)$ 在 $x = e$ 处的导数 $f'(e)$. 由于 $f(x) = e^{x \ln x}$, 利用复合函数求导法则得:

$$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1).$$

将 $x = e$ 代入得:

$$f'(e) = e^e (\ln e + 1) = 2e^e.$$

故原极限为 $2e^e$. □

2. (Darboux 定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上处处可导, 且满足 $f'(a) < f'(b)$. 证明: 对于任意满足 $f'(a) < k < f'(b)$ 的实数 k , 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = k$.

证明. 构造辅助函数 $g(x) = f(x) - kx$. 显然 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处可导, 从而在 $[a, b]$ 上连续. 根据最值定理, $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必能达到最小值. 由已知得 $g'(a) = f'(a) - k < 0$, 根据导数定义的保号性, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $x \in (a, a + \delta_1)$ 时, $g(x) < g(a)$. 故最小值点 $\xi \neq a$. 同理, 由 $g'(b) = f'(b) - k > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $x \in (b - \delta_2, b)$ 时, $g(x) < g(b)$. 故最小值点 $\xi \neq b$. 因此, 最小值点 ξ 必在开区间 (a, b) 内取得. 根据 Fermat 引理, 必有 $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = k$. □

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且满足 $f(0) = f(1)$. 证明: 对于任意给定的正数 $h \in (0, 1)$, 至少存在一点 $\xi \in [0, 1 - h]$, 使得 $f(\xi + h) = f(\xi)$.

证明. 构造辅助函数 $g(x) = f(x + h) - f(x)$, 则 $g(x)$ 在 $[0, 1 - h]$ 上连续. 若存在 $x_i = ih$ (i 为自然数) 使得 x_i 落在区间内, 考虑序列和: 令 $n = \lfloor 1/h \rfloor$, 若 $1/h = n$ 为整数, 则:

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(ih) = \sum_{i=0}^{n-1} [f((i+1)h) - f(ih)] = f(nh) - f(0) = f(1) - f(0) = 0.$$

由介值定理知必存在 ξ 使 $g(\xi) = 0$ 。

□

4. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足 $f(0) = f(1) = 0$ 。若在开区间内存在一点 $c \in (0, 1)$ 使得 $f(c) > 0$, 证明: 在开区间 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 满足 $f'(\xi) < 0$ 。

证明. 对 $f(x)$ 在闭区间 $[c, 1]$ 上应用 Lagrange 中值定理。由于 $f(x)$ 在 $[c, 1]$ 上连续, 在 $(c, 1)$ 内可导, 故存在 $\xi \in (c, 1) \subset (0, 1)$, 使得:

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c}.$$

由已知条件 $f(1) = 0$ 且 $f(c) > 0$, 得 $f(1) - f(c) < 0$ 。又因 $c < 1$, 故 $1 - c > 0$ 。由此可得 $f'(\xi) < 0$ 。

□

数学 II

供题人：数试 2502 张杰铭 2026 年 04 月 20 日

难度：二星

注：本习题适合预科二正在学习《数学 II》的同学食用。

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处存在单侧导数，证明：

(1) 如果 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，那么 $f'_+(x_0) \geq 0$, $f'_-(x_0) \leq 0$;

(2) 如果 $f'_+(x_0) > 0$, $f'_-(x_0) < 0$ ，那么 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.

证 (1) 由于 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，在 x_0 的某一邻域 U 内有

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (\forall x \in U).$$

从而当 $x > x_0$ 时有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. 取极限得

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

当 $x < x_0$ 时有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. 取极限得

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

(2) 我们记 $f'_+(x_0) = a > 0$. 从而存在 $\delta_+ > 0$ ，满足

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{a}{2} \quad (\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_+))$$

这就是说 $f(x) - f(x_0) > \frac{a}{2}(x - x_0) > 0$. 同理可得存在 $\delta_- > 0$ ，使得对任意的 $x \in (x_0 - \delta_-, x_0)$ 有 $f(x) - f(x_0) > \frac{b}{2}(x - x_0) > 0$. 故我们有

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta = \min\{\delta_+, \delta_-\})$$

即 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点. □

注 本题 (2) 中的条件若改为 “ $f'_+(x_0) \geq 0$, $f'_-(x_0) \leq 0$ ”，结论将不再成立.

2. 用 Lagrange 中值定理证明不等式：

$$(1) |\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$$

$$(2) |\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|;$$

$$(3) e^x > 1 + x \quad (x > 0);$$

$$(4) \ln(1 + x) < x \quad (x > 0).$$

证 容易验证 $\sin x$, $\arctan x$, e^x , $\ln(1 + x)$ 在其定义域中的任一闭区间内都满足 Lagrange 中值定理的使用条件，它们的导数分别为 $\cos x$, $\frac{1}{1+x^2}$, e^x , $\frac{1}{1+x}$.

(1) 当 $x = y$ 时显然成立. 否则不妨 $x > y$, 则存在 $\xi \in (y, x)$ 使得

$$|\sin x - \sin y| = |\cos \xi| \cdot |x - y| \leq |x - y|.$$

(2) 当 $x = y$ 时显然成立. 否则不妨 $x > y$, 则存在 $\xi \in (y, x)$ 使得

$$|\arctan x - \arctan y| = \frac{1}{1+\xi^2} \cdot |x - y| \leq |x - y|.$$

(3) 存在 $\xi \in (0, x)$ 使得

$$e^x - e^0 = e^\xi \cdot (x - 0) > x,$$

化简即得 $e^x > 1 + x$.

(4) 存在 $\xi \in (0, x)$ 使得

$$\ln(1 + x) - \ln(1 + 0) = \frac{1}{1+\xi} \cdot (x - 0) < x,$$

化简即得 $\ln(1 + x) < x$. □

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导. 若它不是线性的, 即对任意的 $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $f(x) - (a_1x + a_0)$ 不恒为 0, 证明存在 $\xi \in [a, b]$ 满足

$$f'(\xi) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

证 考虑过 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 两点的线性函数

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a},$$

由 $f(x)$ 非线性知存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) \neq g(c)$.

当 $f(c) > g(c)$ 时, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (a, c)$ 满足

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > \frac{g(c) - g(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

当 $f(c) < g(c)$ 时, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (c, b)$ 满足

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} > \frac{g(b) - g(c)}{b - c} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

对上述两种情况的讨论表明总是存在 $\xi \in [a, b]$ 满足

$$f'(\xi) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

注 本题的结论可以加强为: $\xi \in [a, b]$ 满足

$$|f'(\xi)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

4. 设定义在 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2 \quad (\forall x_1, x_2 \in [a, b]),$$

证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为常数.

证 法一. 我们证明对任意的 $x_0 \in (a, b)$ 有 $f'(x_0) = 0$.

设 $\delta > 0$ 满足 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a, b]$. 对任意 $\Delta x \in (0, \delta)$ 有

$$\left| \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right| \leq \Delta x,$$

这就是说

$$|f'(x_0)| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right| \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为常数. □

法二. 对于任意取定的 $x_1, x_2 \in [a, b]$ ($x_1 < x_2$), 我们证明 $f(x_1) = f(x_2)$.

对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 我们记

$$c_i = \frac{n-i}{n}x_1 + \frac{i}{n}x_2 \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(c_i) - f(c_{i+1})| \leq \frac{1}{n}(x_1 - x_2)^2.$$

令 $n \rightarrow \infty$ 可以得到 $f(x_1) = f(x_2)$. □

注 本题由于未给出连续性、可导性等条件, 不能直接使用 Lagrange 中值定理, 但是可以通过所给条件用定义计算导数的值. 法二所给出的初等方法也起到了不错的效果.

数学 II

供题人：少年班 2405 张洛宁 2026 年 03 月 28 日

难度：二星

注：本题适合预科二正在学习《数学 II》的同学食用。

1. 证明：在 $x \rightarrow 0$ 时

$$1) \quad \cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$2) \quad \ln(x+1) \sim e^x - 1 \sim x$$

$$3) \quad (1+t)^\lambda \sim \lambda t, \quad (1-t)^\lambda \sim -\lambda t$$

$$4) \quad \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x \quad (\text{不需要 } x \rightarrow 0)$$

证明：1) 由余弦的二倍角公式 $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ ，得

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时， $\frac{x}{2} \rightarrow 0$ ，由等价无穷小 $\sin u \sim u$ 得 $\sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$ ，故

$$1 - \cos x \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

2) $\ln(1+x) \sim x$ ：利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ 及对数连续性，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}\right) = \ln e = 1.$$

故 $\ln(1+x) \sim x$ 。

$e^x - 1 \sim x$: 令 $t = e^x - 1$, 则 $x = \ln(1+t)$, 且 $x \rightarrow 0$ 时 $t \rightarrow 0$ 。于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1,$$

最后一步用到已证的 $\ln(1+t) \sim t$ 。故 $e^x - 1 \sim x$ 。

3) 考虑极限 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\lambda - 1}{t}$ 。令 $u = (1+t)^\lambda - 1$, 则 $(1+t)^\lambda = 1+u$, 取对数得

$$\lambda \ln(1+t) = \ln(1+u).$$

当 $t \rightarrow 0$ 时 $u \rightarrow 0$ 。利用已证的 $\ln(1+t) \sim t$ 及 $\ln(1+u) \sim u$, 有

$$\frac{(1+t)^\lambda - 1}{t} = \frac{u}{t} = \frac{u}{\ln(1+u)} \cdot \frac{\ln(1+u)}{t} = \frac{u}{\ln(1+u)} \cdot \frac{\lambda \ln(1+t)}{t}.$$

取极限得

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1,$$

所以

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\lambda - 1}{t} = 1 \cdot \lambda \cdot 1 = \lambda.$$

故 $(1+t)^\lambda - 1 \sim \lambda t$ 。将 λ 换为 $-\lambda$ 或令 $t \mapsto -t$ 可得 $(1-t)^\lambda - 1 \sim -\lambda t$ 。

4) 令 $f(t) = \ln(1+t)$, 其在区间 $[0, x]$ (或 $[x, 0]$ 当 $x < 0$) 上连续, 在 $(0, x)$ 内可导, 且 $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ 。由拉格朗日中值定理, 存在 ξ 介于 0 与 x 之间, 使得

$$\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0} = \frac{1}{1+\xi} \implies \ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}.$$

若 $x > 0$, 则 $0 < \xi < x$, 从而 $1 < 1 + \xi < 1 + x$, 于是

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x,$$

即 $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ 。

若 $-1 < x < 0$, 则 $x < \xi < 0$, 此时 $1+x < 1+\xi < 1$, 取倒数并乘以负数 x 会改变不等号方向, 可得反向不等式。 $\square$

2. 设函数 f 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且

$$f(0) = 0, \quad f(1) = a, \quad f(2) = b,$$

其中 a, b 为常数。证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得

$$f''(\xi) = b - 2a.$$

证明: 构造二次多项式 $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, 使其经过点 $(0, 0), (1, a), (2, b)$ 。

由 $P(0) = 0$ 得 $C = 0$;

由 $P(1) = a$ 得 $A + B = a$;

由 $P(2) = b$ 得 $4A + 2B = b$ 。

解得

$$A = \frac{b-2a}{2}, \quad B = \frac{4a-b}{2},$$

于是 $P''(x) \equiv 2A = b - 2a$ 。

令 $g(x) = f(x) - P(x)$, 则

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 0, \quad g(2) = 0.$$

对 g 在 $[0, 1]$ 上应用罗尔定理, 存在 $\eta_1 \in (0, 1)$ 使得 $g'(\eta_1) = 0$; 对 g 在 $[1, 2]$ 上

应用罗尔定理, 存在 $\eta_2 \in (1, 2)$ 使得 $g'(\eta_2) = 0$ 。

再对 g' 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上应用罗尔定理, 存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (0, 2)$ 使得 $g''(\xi) = 0$ 。

由于 $P(x)$ 是二次多项式, 其二阶导数恒为常数 $b - 2a$, 故

$$0 = g''(\xi) = f''(\xi) - P''(\xi) = f''(\xi) - (b - 2a).$$

因此 $f''(\xi) = b - 2a$, 证毕。 □

3. 设函数 f 在 $[-1, 1]$ 上三阶可导, 且满足

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

证明: 存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$ 。

证明: 由泰勒公式, 将 $f(1)$ 与 $f(-1)$ 在 $x = 0$ 处展开至三阶拉格朗日余项:

$$f(1) = f(0) + f'(0) \cdot 1 + \frac{f''(0)}{2} \cdot 1^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6} \cdot 1^3, \quad \xi_1 \in (0, 1),$$

$$f(-1) = f(0) + f'(0) \cdot (-1) + \frac{f''(0)}{2} \cdot (-1)^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{6} \cdot (-1)^3, \quad \xi_2 \in (-1, 0).$$

代入已知条件 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 0$, 得

$$\begin{cases} 1 = \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\xi_1)}{6}, \\ 0 = \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\xi_2)}{6}. \end{cases}$$

两式相减消去 $f''(0)$, 得到

$$1 = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{6} \implies f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6.$$

令 $m = \min\{f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\}$, $M = \max\{f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\}$, 则

$$m \leq \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = 3 \leq M.$$

若 $m = M$, 则 $f'''(\xi_1) = f'''(\xi_2) = 3$, 结论已成立。

若 $m < M$, 则 $m < 3 < M$ 。因为 f 三阶可导, f''' 是 f'' 的导函数, 根据达布定理, 存在介于 ξ_1 与 ξ_2 之间的点 ξ , 使得 $f'''(\xi) = 3$ 。由于 $\xi_1 \in (0, 1)$, $\xi_2 \in (-1, 0)$, 故 $\xi \in (-1, 1)$ 。

综上, 总存在 $\xi \in (-1, 1)$ 使 $f'''(\xi) = 3$ 。 □

4. 设函数 f 在点 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 2$ 。此外, 导函数 f' 在 $x = 0$ 处连续。求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\arcsin x) - f(\arctan x)}{x^3}.$$

证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \rightarrow 0, \arctan x \rightarrow 0$ 。由拉格朗日中值定理, 存在介于 $\arcsin x$ 与 $\arctan x$ 之间的实数 ξ , 使得

$$f(\arcsin x) - f(\arctan x) = f'(\xi)(\arcsin x - \arctan x).$$

由于 $\arcsin x \sim x, \arctan x \sim x$, 故 ξ 介于两个同阶无穷小之间, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \xi = 0$ 。又因 f' 在 $x = 0$ 处连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi) = f'(0) = 2.$$

另一方面, 由泰勒展开可得:

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

于是

$$\arcsin x - \arctan x = \frac{x^3}{2} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{2} \quad (x \rightarrow 0).$$

因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\arcsin x) - f(\arctan x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi) \cdot \frac{\arcsin x - \arctan x}{x^3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

□

数学 II

供题人：少年班 2403 王昱栋 2026 年 05 月 03 日

难度：二星

注：本题适合预科二正在学习《数学 II》的同学食用。

1. 证明：曲线

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

有位于同一直线上的三个拐点。作出这个函数的图像。

答案：首先计算一阶和二阶导数。

$$y' = \frac{(x^2+1) \cdot 1 - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

$$y'' = \frac{(-2x-2)(x^2+1)^2 - (-x^2-2x+1) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}.$$

分子提取公因子 $2(x^2+1)$ ：

$$y'' = \frac{2(x^2+1)[(-x-1)(x^2+1) - 2x(-x^2-2x+1)]}{(x^2+1)^4}.$$

化简括号内：

$$(-x-1)(x^2+1) = -x^3 - x - x^2 - 1,$$

$$-2x(-x^2-2x+1) = 2x^3 + 4x^2 - 2x.$$

相加得到：

$$(-x^3 - x^2 - x - 1) + (2x^3 + 4x^2 - 2x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 1.$$

所以

$$y'' = \frac{2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)}{(x^2 + 1)^3}.$$

令 $y'' = 0$, 解三次方程 $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$ 。因式分解:

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = (x - 1)(x^2 + 4x + 1) = 0,$$

解得 $x = 1, x = -2 \pm \sqrt{3}$ 。三个拐点为:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2 + \sqrt{3}, \quad x_3 = -2 - \sqrt{3}.$$

对应的 y 坐标分别代入原函数计算。经过计算可知这三个拐点共线。事实上, 可以验证它们满足线性方程 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 。因此三个拐点位于同一直线上。

2. 研究摆线 (旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0)$$

的凹凸性。

答案: 先求一阶、二阶导数。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

再求二阶导:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1 - \cos t)^2} \\ &= \frac{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2} = \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{1 - \cos t}. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{1}{1-\cos t}}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

由于 $a > 0$, 分母 $(1 - \cos t)^2 \geq 0$, 且分子为 -1 , 因此

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \quad (\text{当 } t \neq 2k\pi), \quad \text{在 } t = 2k\pi \text{ 处为尖点.}$$

所以摆线的每一拱 ($0 < t < 2\pi$) 上曲线是凸的 (二阶导小于零对应凸函数, 依不同教材凹凸定义可能相反, 此处以 $y'' < 0$ 为上凸)。

3. 设当 $x \rightarrow 0$ 时有 $f(x) = 1 + kx + o(x)$ 。证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{\frac{1}{x}} = e^k.$$

证明: 由已知条件, 当 $x \rightarrow 0$,

$$f(x) = 1 + kx + o(x).$$

考虑极限

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{1/x}.$$

取自然对数:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{x}.$$

由于 $f(x) \rightarrow 1$, 利用 $\ln(1+u) \sim u$ ($u \rightarrow 0$):

$$\ln f(x) = \ln(1 + kx + o(x)) \sim kx + o(x).$$

因此

$$\frac{\ln f(x)}{x} \rightarrow k \quad (x \rightarrow 0).$$

于是 $\ln L = k$, 即 $L = e^k$. 证毕。

4. 将函数 $f(x) = x^x - 1$ 按照 $x - 1$ 的非负整数次幂展开至含有 $(x - 1)^3$ 的项。

答案: 令 $t = x - 1$, 则 $x = 1 + t$, 且 $t \rightarrow 0$ 对应于 $x \rightarrow 1$ 。首先写出 x^x 在 $x = 1$ 处的展开式。

因为

$$x^x = e^{x \ln x},$$

记 $g(x) = x \ln x$ 。在 $x = 1$ 处展开 $g(x)$:

$$g(1) = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$g'(x) = \ln x + 1, \quad g'(1) = 1.$$

$$g''(x) = \frac{1}{x}, \quad g''(1) = 1.$$

$$g'''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad g'''(1) = -1.$$

从而

$$g(x) = 0 + (x - 1) + \frac{1}{2!}(x - 1)^2 + \frac{-1}{3!}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3)$$

$$= (x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{6}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3).$$

于是

$$x^x = e^{g(x)} = \exp \left[t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \right],$$

其中 $t = x - 1$ 。利用 $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$, 代入

$$u = t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3.$$

计算：

$$u^2 = t^2 + t^3 + o(t^3), \quad u^3 = t^3 + o(t^3).$$

因此

$$x^x = 1 + \left(t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3\right) + \frac{1}{2}(t^2 + t^3) + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3).$$

合并系数：

$$t : 1,$$

$$t^2 : \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$t^3 : -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

故

$$x^x = 1 + t + t^2 + \frac{1}{2}t^3 + o(t^3).$$

于是

$$f(x) = x^x - 1 = t + t^2 + \frac{1}{2}t^3 + o(t^3),$$

即

$$f(x) = (x - 1) + (x - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3).$$

少年班数学

供题人：少年班 2407 吴悠

1. 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导。证明： $f(x)$ 在 I 上满足 Lipschitz 条件的充分必要条件是 $f'(x)$ 在 I 上有界。

证明. ($\Leftarrow$) 设 $\exists M > 0$, 使得 $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$. $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$, 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi$ 介于 x_1, x_2 之间, 使得

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2).$$

得 $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| \leq M|x_1 - x_2|$. 取 $L = M$ 即可。

($\Rightarrow$) 设 $\exists L > 0$, 使得 $\forall x_1, x_2 \in I, |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$. $\forall x \in I, \forall \Delta x \neq 0$ 且 $x + \Delta x \in I$, 有

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right| \leq L.$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 得 $|f'(x)| \leq L$. 证毕。 □

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且满足 $f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得

$$|f''(\xi)| \geq 2.$$

证明. 将 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处作 Taylor 展开:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi_x)}{2}x^2, \quad \xi_x \in (0, x).$$

代入 $x = 1$, 得

$$1 = \frac{f''(\xi)}{2}, \quad \xi \in (0, 1).$$

故 $f''(\xi) = 2 \implies |f''(\xi)| \geq 2$. □

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 满足 $f(0) = f(1) = 0$, 且 $\min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f''(\xi) \geq 8.$$

证明. 设 $f(x_0) = \min_{x \in [0,1]} f(x) = -1$ 。由 $f(0) = f(1) = 0$ 知 $x_0 \in (0, 1)$ 。由 Fermat 定理, $f'(x_0) = 0$ 。在 x_0 处作 Taylor 展开, 分别代入 $x = 0$ 与 $x = 1$:

$$0 = f(0) = -1 + \frac{f''(\eta_1)}{2}x_0^2 \implies f''(\eta_1) = \frac{2}{x_0^2}, \quad \eta_1 \in (0, x_0).$$

$$0 = f(1) = -1 + \frac{f''(\eta_2)}{2}(1-x_0)^2 \implies f''(\eta_2) = \frac{2}{(1-x_0)^2}, \quad \eta_2 \in (x_0, 1).$$

故有 $\min\{x_0^2, (1-x_0)^2\} \leq \frac{1}{4}$ 。若 $x_0^2 \leq \frac{1}{4}$, 则 $f''(\eta_1) \geq 8$; 若 $(1-x_0)^2 \leq \frac{1}{4}$, 则 $f''(\eta_2) \geq 8$ 。故 $\exists \xi \in \{\eta_1, \eta_2\} \subset (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) \geq 8$ 。□

4. 求极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} - e^{-1/2} \right].$$

解.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

两边取对数:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) &= \ln \left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \right) \\ &= \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} \right)^2 + o(x^2) \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{5}{24}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

代回原式:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{24}x + o(x) \right) - e^{-1/2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/2} \left(e^{\frac{5}{24}x + o(x)} - 1 \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/2} \left(\frac{5}{24}x + o(x) \right)}{x} \\ &= \frac{5}{24\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

□

数学 II

供题人：数试 2502 张杰铭 2026 年 05 月 18 日

难度：二星

注：本习题适合预科二正在学习《数学 II》的同学食用。

1. 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的凸函数，满足 $f(0) = f(1) = 0$. 证明 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上恒负或恒为零.

证 由凸函数的定义易知对任意 $x \in (0, 1)$ 有

$$f(x) = f(x \cdot 1 + (1-x) \cdot 0) \leq xf(1) + (1-x)f(0) = 0.$$

如果 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上不恒负，即存在 $c \in (0, 1)$ 使得 $f(c) = 0$. 则对任意 $x \in (0, c)$ ，取 $\lambda = \frac{1-c}{1-x}$ ，由凸函数的定义知

$$f(c) = f(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot 1) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(1)$$

即

$$f(x) \geq \frac{1}{\lambda}(f(c) - (1-\lambda)f(1)) = 0.$$

由 $f(x) \leq 0$ 知 $f(x) = 0$. 同理，对任意 $x \in (c, 1)$ 有 $f(x) = 0$ ，从而 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上恒为零. $\square$

注 本题有多种做法，例如排除恒为零的情形后利用 $(0, 1)$ 内的一个负值点与端点作割线放缩即可得到 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上恒负.

2. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的凸函数.

(1) 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内的任一点处存在单侧导数;

(2) 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续;

(3) 举例说明 $f(x)$ 不一定在 $[a, b]$ 上连续, 也不一定在 (a, b) 内可导.

证 (1) 对任意 $c \in (a, b)$, 取 $\delta > 0$ 使得 $(c - \delta, c + \delta) \subseteq (a, b)$. 我们首先证明当 $0 < |t| < \delta$ 时有

$$\frac{f(c - \delta) - f(c)}{-\delta} \leq \frac{f(c + t) - f(c)}{t} \leq \frac{f(c + \delta) - f(c)}{\delta}.$$

事实上, 当 $t > 0$ 时, 由凸函数的定义有

$$\begin{aligned} f(c) &= f\left(\frac{t}{\delta + t} \cdot (c - \delta) + \frac{\delta}{\delta + t} \cdot (c + t)\right) \leq \frac{t}{\delta + t} \cdot f(c - \delta) + \frac{\delta}{\delta + t} \cdot f(c + t) \\ f(c + t) &= f\left(\frac{t}{\delta} \cdot (c + \delta) + \frac{\delta - t}{\delta} \cdot c\right) \leq \frac{t}{\delta} \cdot f(c + \delta) + \frac{\delta - t}{\delta} \cdot f(c) \end{aligned}$$

整理即可得到要证的不等式. $t < 0$ 的情形是同理的.

在 $(0, \delta)$ 上定义 $g(t) = \frac{f(c+t)-f(c)}{t}$. 从而 $g(t)$ 单调增加且有下界, 这说明它在 $t = 0$ 处的右极限存在 (若不然, 我们可以构造单调减少的数列 $\{t_n\} \subseteq (0, \delta)$ 使得 $\{f(t_n)\}$ 发散, 从而与单调有界收敛原理矛盾), 即 $f(x)$ 在 $x = c$ 处的右导数存在. 同理 $f(x)$ 在 $x = c$ 处的左导数存在. 由 c 的任意性知 $f(x)$ 在 (a, b) 内的任一点处存在单侧导数.

(2) 任取 $c \in (a, b)$, 由于 $f(x)$ 在 $x = c$ 处有左、右导数, 从而 $f(x)$ 在 $x = c$ 处左、右连续, 即 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

(3) 考虑

$$f(x) = \begin{cases} |x - \frac{a+b}{2}|, & x \in (a, b) \\ \frac{b-a}{2} + 1, & x \in \{a, b\} \end{cases},$$

它在端点处不满足单侧连续性, 同时在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处不可导. □

注 我们在 (1) 中所证不等式的几何意义是直观的.

3. 设 $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $x_{n+1} = \sin x_n$ ($n \in \mathbb{N}^+$). 证明 $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ ($n \rightarrow \infty$).

证 先证 $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 事实上, 由数列 $\{x_n\}$ 单调有界知它存在极限. 记 $A := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 从而由 $\sin$ 的连续性, 我们有

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \sin A$$

从而 $A = 0$. 即 $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

回到原题, 我们需要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x_n^2}}{n} = 1$. 这使我们考虑使用 Stolz 定理.

事实上, $t \rightarrow 0$ 时我们有

$$\frac{3(t^2 - \sin^2 t)}{t^2 \sin^2 t} = \frac{3(t^2 - (t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3))^2)}{t^2 \sin^2 t} = \frac{t^4 + o(t^4)}{t^4} \cdot \frac{t^2}{\sin^2 t} = 1 + o(1)$$

从而由 $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 知

$$\frac{3}{x_n^2} - \frac{3}{x_{n-1}^2} = \frac{3(x_{n-1}^2 - \sin^2 x_{n-1})}{x_{n-1}^2 \sin^2 x_{n-1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

从而由 Stolz 定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x_n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x_n^2} - \frac{3}{x_{n-1}^2}}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{x_n^2} - \frac{3}{x_{n-1}^2} = 1.$$

□

4. 设定义在 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x)$ 二阶可导, 且满足 $|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 2$. 证明 $|f'(x)| \leq 3$, 并举例说明这一结果是最优的.

证 由题意知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 任取 $c \in [0, 1]$, 作 $f(x)$ 在 $x = c$ 处的带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 公式

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - c)^2,$$

其中 ξ 介于 x 与 c 之间. 代入 $x = 0$ 与 $x = 1$ 有

$$f(0) = f(c) - f'(c)c + \frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2$$

$$f(1) = f(c) + f'(c)(1 - c) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1 - c)^2$$

两式相减并整理得

$$f'(c) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2 - \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1 - c)^2$$

从而有

$$\begin{aligned} |f'(c)| &= |f(1) - f(0) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2 - \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1 - c)^2| \\ &\leq |f(1)| + |f(0)| + \frac{1}{2} \cdot 2(c^2 + (1 - c)^2) \\ &\leq 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

由 c 的任意性得证.

$f(x) = x^2 - 1$ 满足条件且 $f'(1) = 3$, 这说明我们的结果是最优的. $\square$

注 从证明过程中容易看出, 一般地有 $|f'| \leq 2 \sup |f| + \frac{1}{2} \sup |f''|$.