■ **课程学习任务**

理解物理现象、掌握物理原理、了解和运用物理规律、

■ **课程学习内容**

光学（几何光学、波动光学）、热学（热力学、分子动力学）、

稳恒磁场、电磁感应

■ **期末总成绩构成**　　平时作业：　10分　　期末考试：　90分

■ **参考书：**

《物理》第三分册、《光学》《热学》《电磁学》赵凯华编写

一. 几何光学基本原理

1. 概论-光学的发展

光学　　几何光学　　物理光学　　量子光学

几何光学

几何是研究空间结构及性质的一门学科。

基于光的直线传播研究光的传播及成像规律及其应用的科学。

物理光学

以光是一种波动为基础的物理光学。

量子光学

以光是一种粒子为基础的物理光学。量子光学一词是在有了激光后才提出来的。

1. 概论-光学发展历史

古代光学（15世纪以前）

对简单光现象进行了记载并做了不系统的研究，制造了简单的光学仪器（如平面镜、凸面镜、凹面镜）。e.g. 凹面镜取火

《墨经》中记录了世界上最早的光学知识。包括影的定义和生成，光的直线传播性和针孔成像等。（圭表、日晷）

北宋著名学者沈括所著《梦溪笔谈》被认为是中国科技史的里程碑，里面不仅记录了多种光学现象， 包括平面镜、凹球面镜和凸球面镜中物和像的关系。

欧几里德在其著作 《光学》一书中提出触须学说：(1)正确反映了光的直线传播规律；(2)错误：人眼能发出光线

墨子（公元前468～376年）

欧几里德（公元前330～275年）

1. 概论-光学发展历史

经典光学 （16世纪-19世纪）

伽利略望远镜（1609年），开普勒望远镜（1611年）

光的微粒学说（牛顿），折射定律（1621年），费马原理（1657年）

惠更斯（荷兰，1629~1695）：光的波动理论的创始人，提出了“光是‘以太’中传播的波动”理论和次波假设（1678年惠更斯原理）

托马斯.杨（英，1773~1829 ）：最先利用干涉原理解释了白光下的薄膜颜色，设计并完成了著名的杨氏双缝干涉实验，提出了光是横波的假设。

菲涅耳（法，1788~1827 ）：利用杨氏干涉原理补充惠更斯原理而提出了惠更斯-菲涅耳原理，解释了光的直线传播定律和衍射现象。建立了菲涅耳公式。（泊松亮斑）

马吕斯（ 法，1775~1812 ）：发现了光的偏振现象，建立了马吕斯定律。

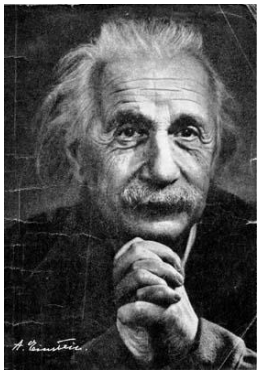
麦克斯韦（ 英，1831~1879 ），赫兹 （德1857~1894）：光是电磁波。

1. 概论-光学发展历史

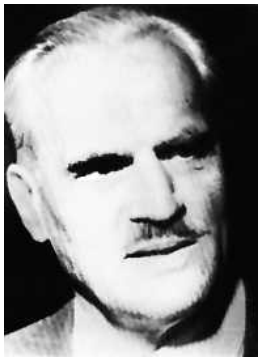
量子光学

发现经典电磁理论在研究光与物质的相互作用时的缺点，证实了以太的不存在，建立了光的量子理论， 园满解释了黑体辐射、光电效应和康普顿效应现象；提出了光的波粒二象性。

黑体辐射问题：普朗克
(德, 1858-1947)



解释光电效应：爱因斯坦
(美, 1879-1955)



X射线散射实验：康普顿
(美, 1892-1962)

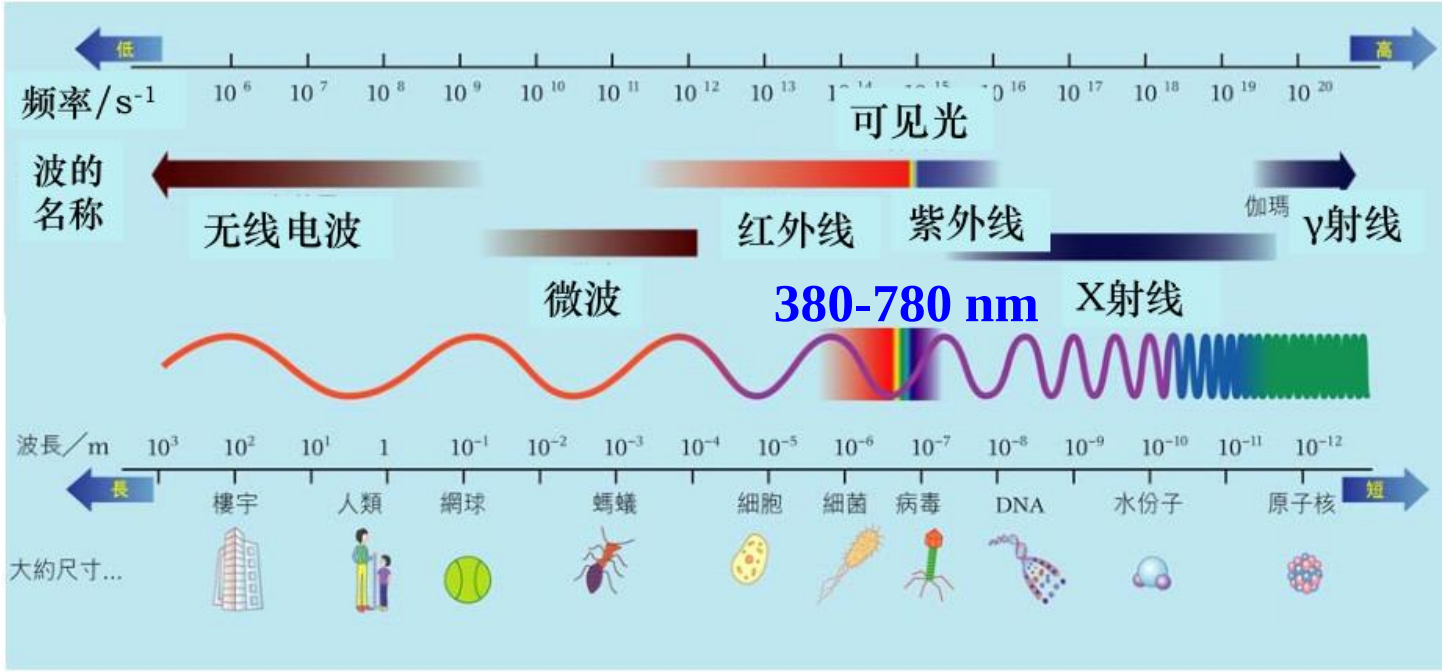
提出物质波假说：德布罗意
(法， 1892-1989)

1. 概论-光学发展历史

电磁波　波速 u　$u=\frac{c}{n}$　频率 ν　波长 λ　$\lambda=\frac{u}{\nu}$

横波

能量

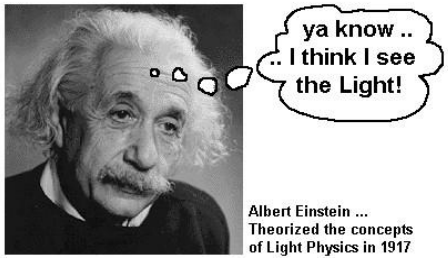


单色光

复色光

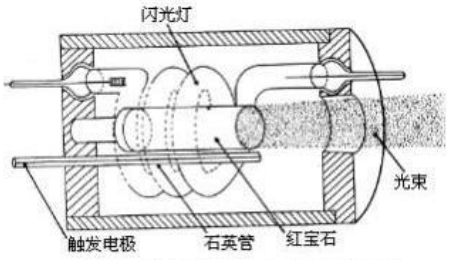
1. 概论-光学发展历史

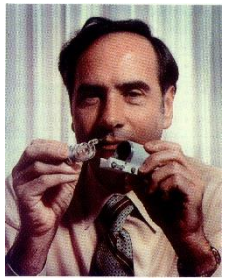
现代光学



1917年爱因斯坦提出受激辐射的概念。

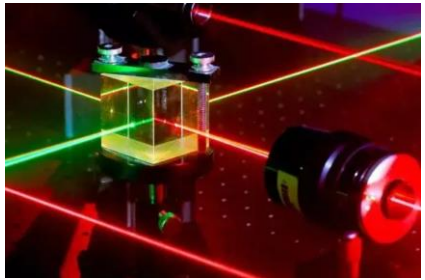
1961年Ali Javan成功制备第一台连续激光器，即He-Ne激光（632 nm）.





1960年，休斯顿航空公司的Theodore Malman 用人造红宝石制造了一个激光器（694 nm）

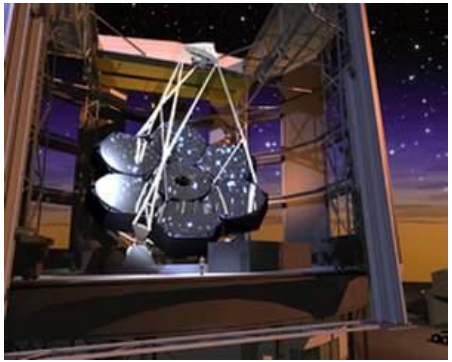
量子光学 量子通信 量子计算



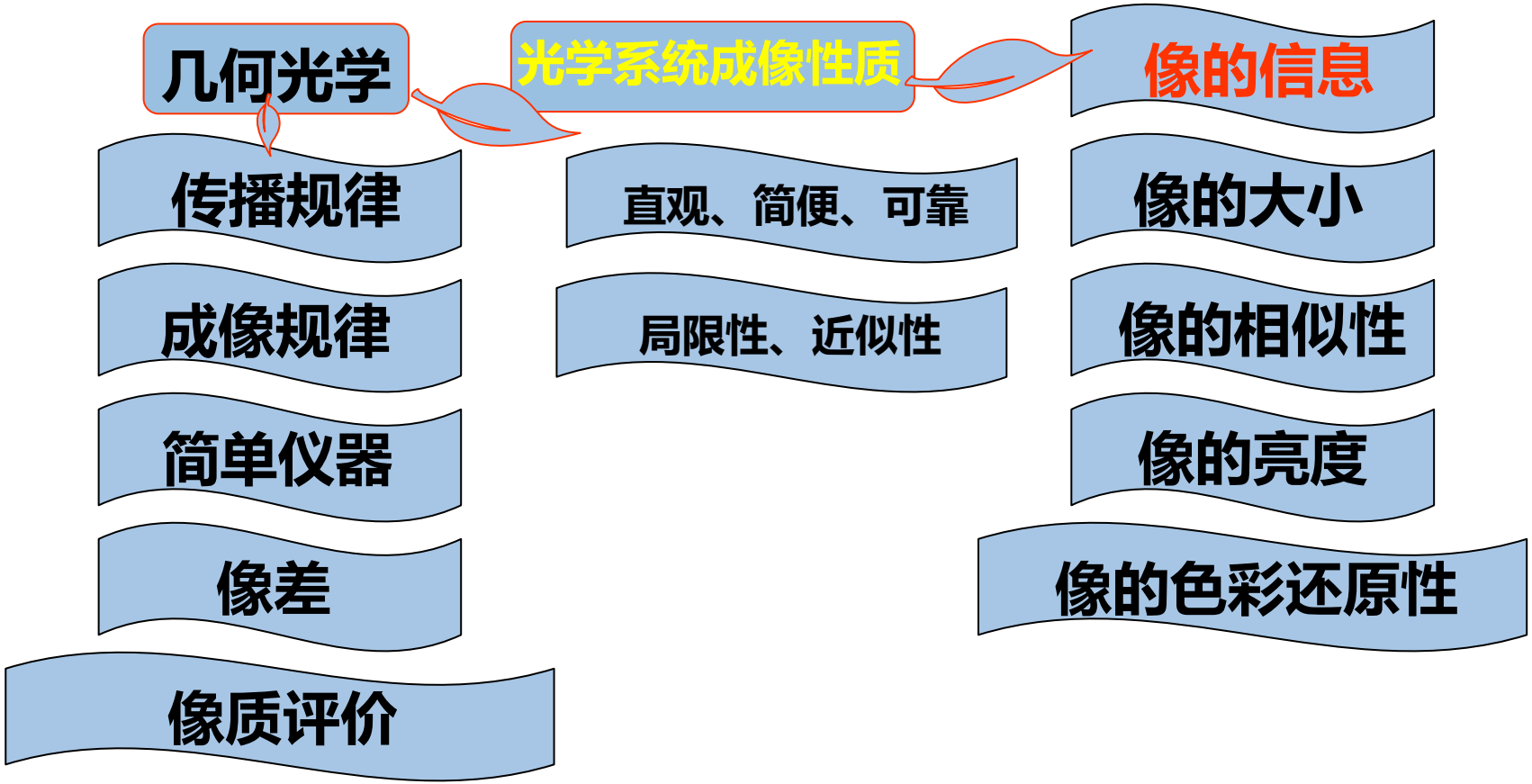
1. 概论-几何光学

几何光学是光学中发展最早的一部分。它所研究的中心问题是物体经光学系统成像的问题。它是以光线概念为基础，研究光的传播规律和成像规律。

适用条件：传播时遇到障碍物的尺寸远大于波长。



1. 概论-几何光学


几何光学
光学系统成像性质
像的信息
传播规律
成像规律
简单仪器
像差
像质评价
直观、简便、可靠
局限性、近似性
像的大小
像的相似性
像的亮度
像的色彩还原性

1. 概论-几何光学基本概念

光源：任何发光的物体：太阳，汞灯，日光灯等

以外形抽象分类
- 点光源：几何上的点，只有空间位置无体积的光源
- 扩展光源
  - 面光源
  - 线光源

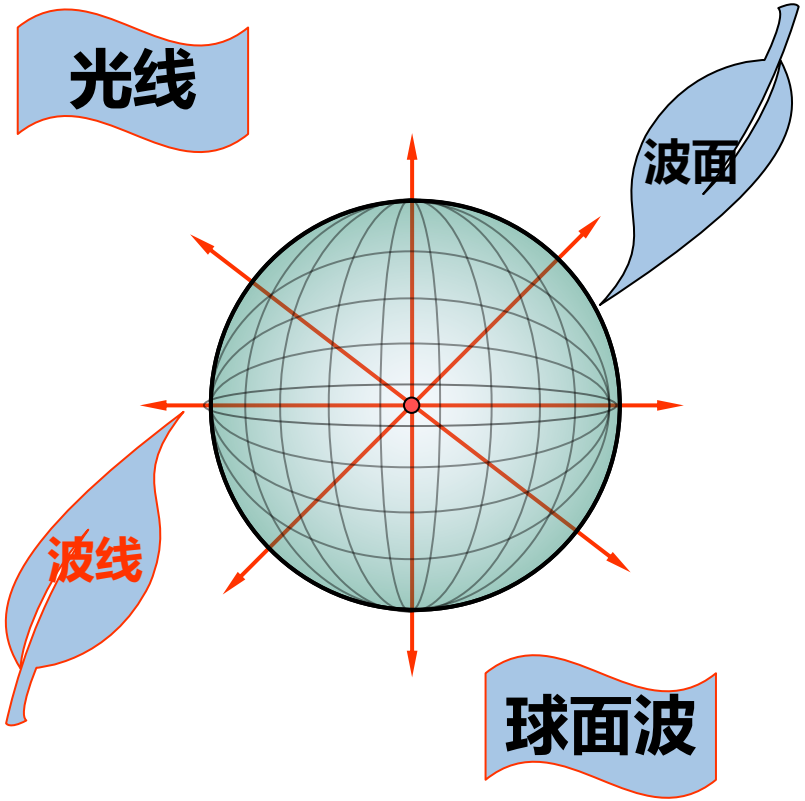
光线：表示光波能流传播方向的几何线

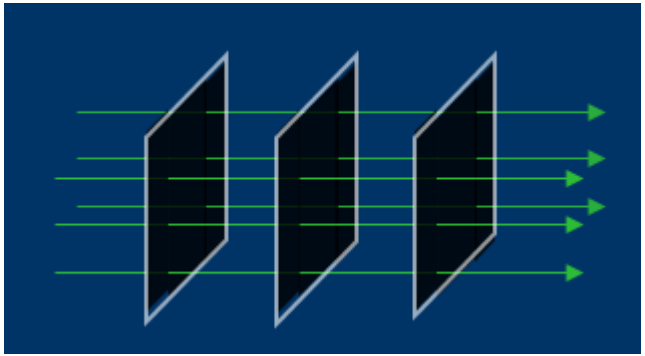
光束：有一定几何关系的一些光线的集合（平行、汇聚、发散）

波面：是电磁波位相相同点的集合

（在各向同性媒质中，能量传播方向垂直于波面，即光线是波面的法线方向。）

1. 概论-几何光学基本概念

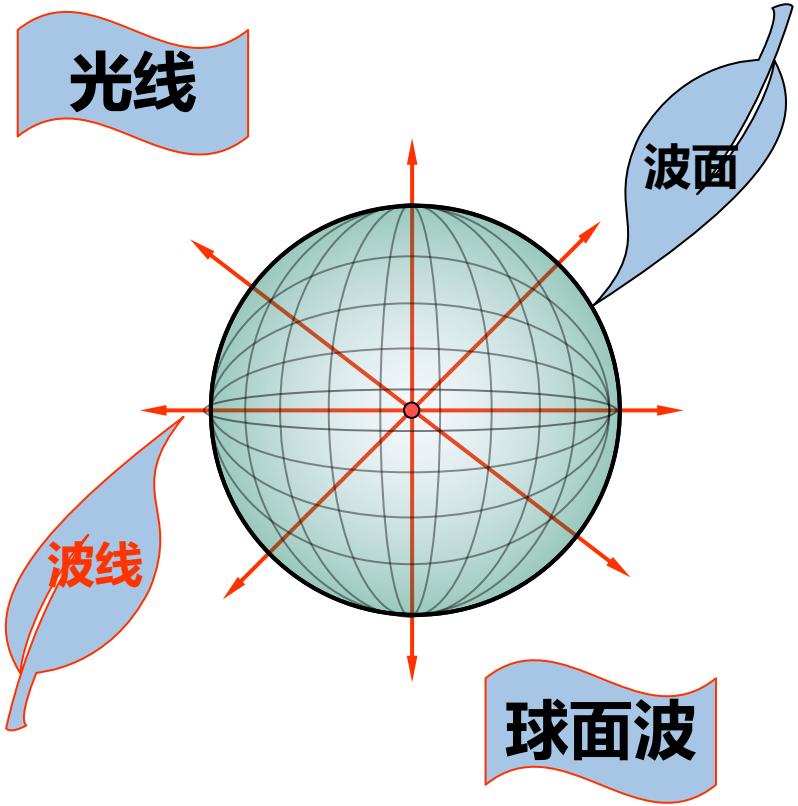


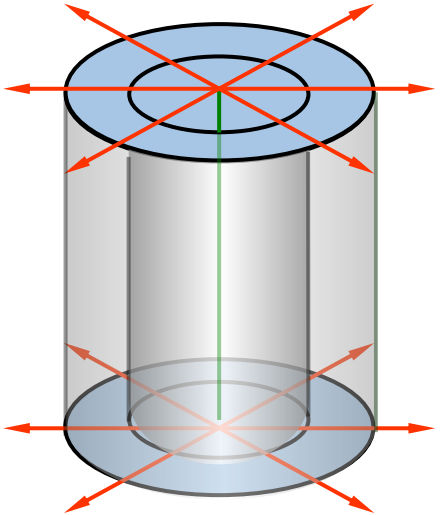


平面波

平行光

1. 概论-几何光学基本概念



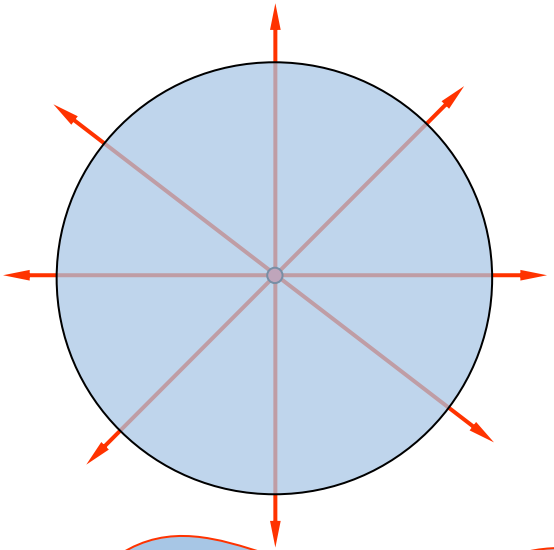


平面波

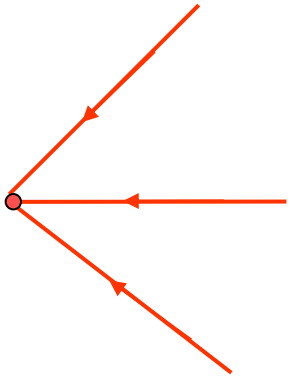
柱面波

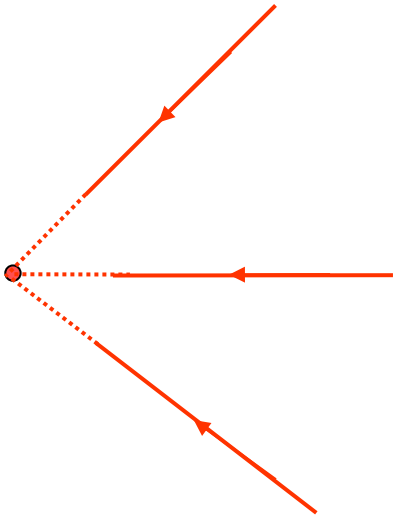
1. 概论-几何光学基本概念

光束　空间具有一定关系的光线的集合。



同心光束



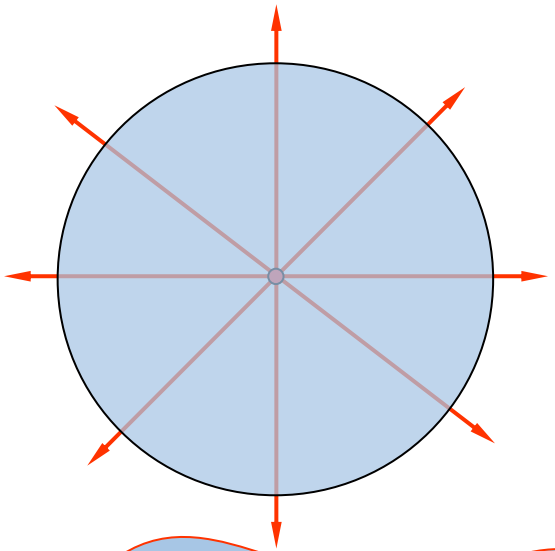


会聚光束

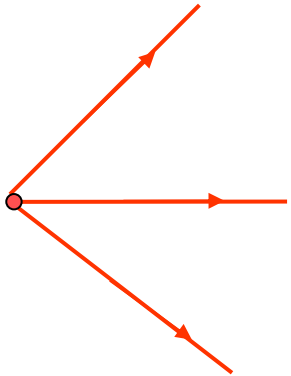
沿着光的传播方向,光束的截面积不断减小

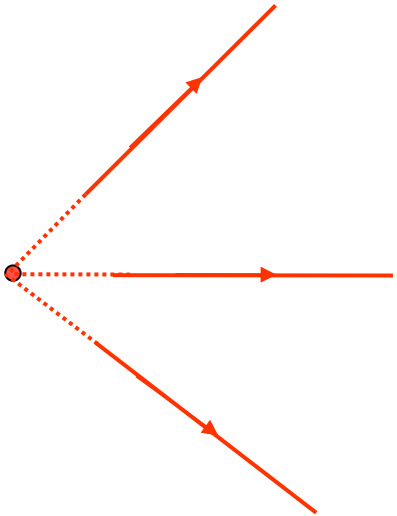
1. 概论-几何光学基本概念

光束　空间具有一定关系的光线的集合。



同心光束



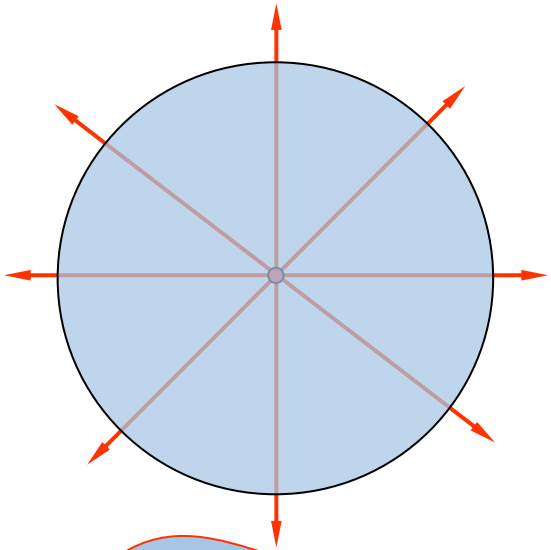


发散光束

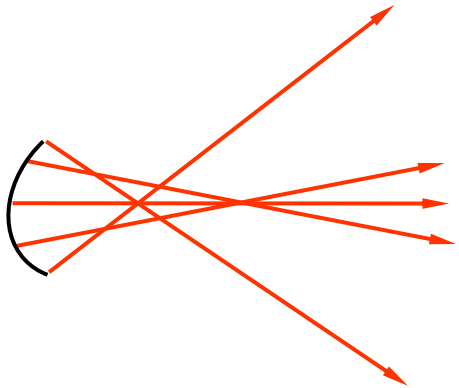
沿着光的传播方向,光束的截面积不断增大

1. 概论-几何光学基本概念

光束　空间具有一定关系的光线的集合。



同心光束



非同心光束

像散光束

各光线或光线的延长线不能相交于一点，但具有一定关系

2. 几何光学的基本定律

光的直线传播定律

- 光在各向同性、均匀介质中沿直线传播。（影子，小孔成像）

- 反之，非均匀介质中，光以曲线传播，向折射率增大方向弯曲。

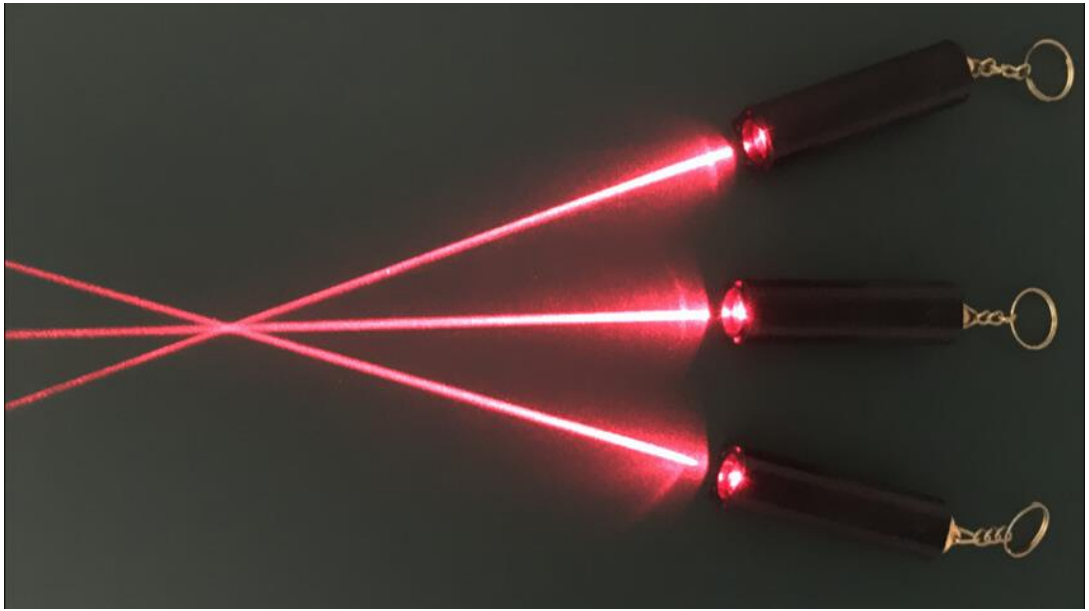
2. 几何光学的基本定律

光的直线传播定律

光在各向同性、均匀介质中沿直线传播。

光的独立传播定律

当多束非相干光线通过空间某点时，各光线的传播保持自己的特性不变，不受其他光线的影响。



2. 几何光学的基本定律

光的直线传播定律

光在各向同性、均匀、透明媒质内沿直线传播。

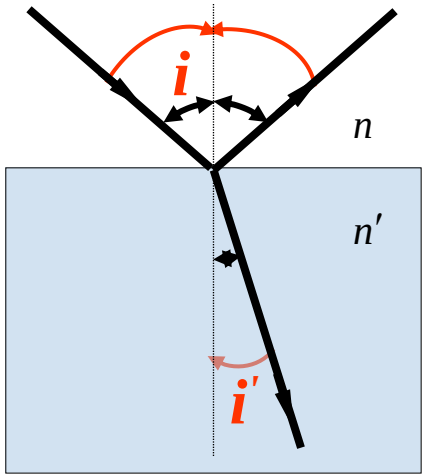
光的独立传播定律

当多束非相干光线通过空间某点时，各光线的传播保持自己的特性不变，不受其他光线的影响。

折射定律、反射定律

$$n\sin i = n'\sin i'$$

$$n' = -n \qquad i' = -i$$



2. 几何光学的基本定律

光的直线传播定律

光在各向同性、均匀、透明媒质内沿直线传播。

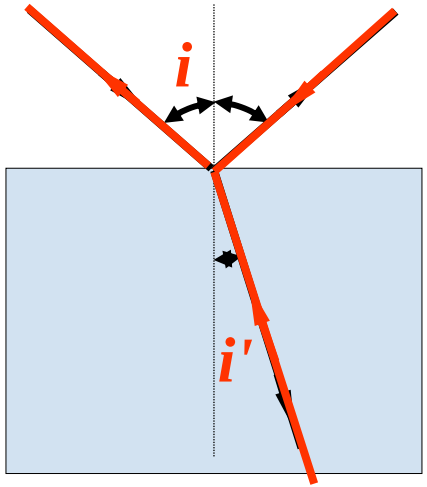
光的独立传播定律

当多束非相干光线通过空间某点时，各光线的传播保持自己的特性不变，不受其他光线的影响。

折射定律、反射定律

$$n\sin i = n'\sin i'$$

$$n' = -n \qquad i' = -i$$



光路可逆性原理

光线在介质中沿某一路径传播，当光线反向时必沿同一路径逆向传播。

2. 几何光学的基本定律

几何光学的基本定律成立条件

均匀介质： 折射率处处相等，不是位置的函数；

各项同性： 折射率各向相等，不是方向的函数；

光强不强： 满足线性叠加规律；

线度波长： 线度大于所研究光的波长；

2. 几何光学的基本定律

费马原理

费马原理是一个描述光线传播行为的原理

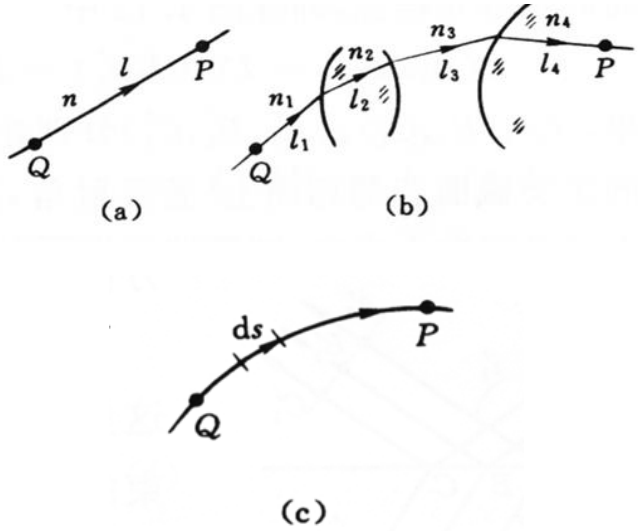
光程定义：光线路径的几何长度与所经过的介质折射率的乘积。

真空中： 光程 $= l$

均匀介质： 光程 $(QP) = nl$ 沿L

分段均匀： $L(QP) = n_1\Delta l_1 + n_2\Delta l_2 + n_3\Delta l_3$

对于非均匀介质： $L(QP) = \int_Q^P n(r)ds$ 沿L



2. 几何光学的基本定律

费马原理

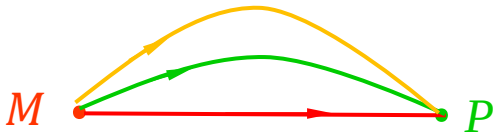
Fermat于1679年提出的，从光程的观点描述光传播的规律:光传播的实际路径是使光程取**极值**(极小值、极大值或稳定值)。

$$\delta L = \delta \int_A^B ndl = 0$$

▲费马原理规定了光线传播的唯一可行的路径。

▲光的直线传播定律，反射定律，折射定律，光路可逆性原理等都可由费马原理证明。

2. 几何光学的基本定律



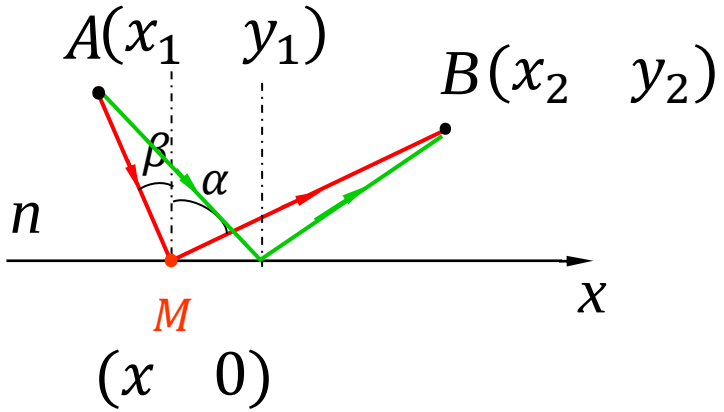
$$\int_A^B ndl = n\int_A^B dl$$

光的直线传播定律　　费马原理(极小值)

2. 几何光学的基本定律

费马原理(反射定律)

$$\delta_{AB} = AM + MB$$



$$AM = \sqrt{(x - x_1)^2 + {y_1}^2}$$

$$MB = \sqrt{(x_2 - x)^2 + {y_2}^2}$$

$$\sin\beta = \sin\alpha$$

$$\dot{\delta_{AB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x - x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + {y_1}^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-2(x_2 - x)}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + {y_2}^2}} = 0$$

$\sin\beta$ $\sin\alpha$

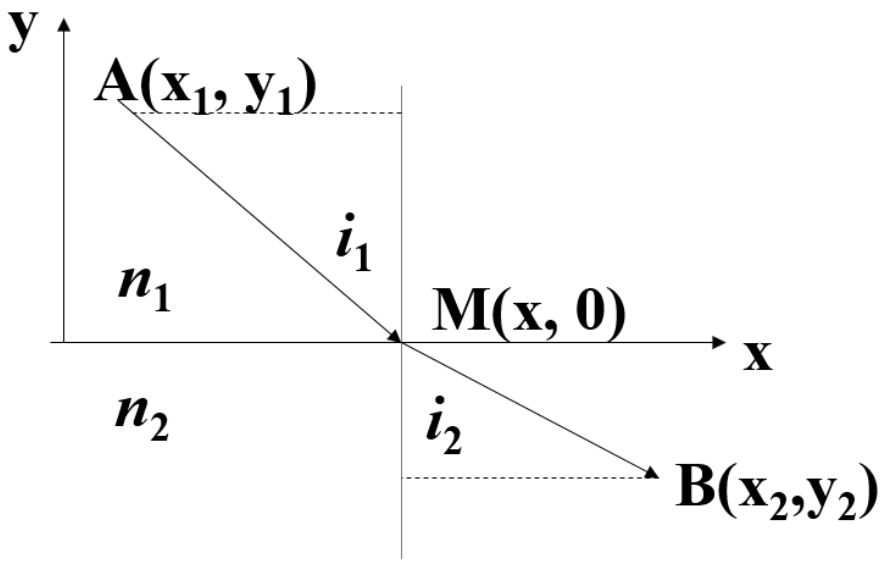
2. 几何光学的基本定律

费马原理 (折射定律)

(1) 折射光线在入射面内，方法和反射定律推导一样。

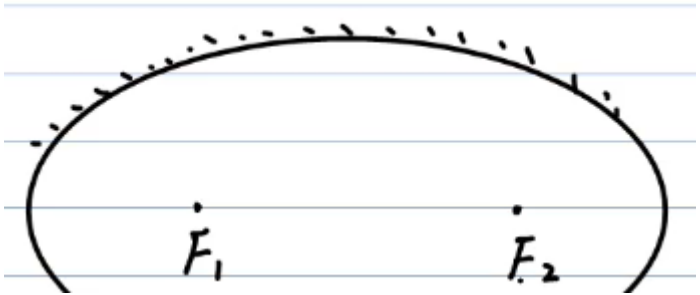
(2) 入射角和折射角的关系；

Q→M→P的光程：.



$$AM + MB = n_1\sqrt{y_1^{\,2} + (x - x_1)^2} + n_2\sqrt{y_2^{\,2} + (x_2 - x)^2} \Rightarrow n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

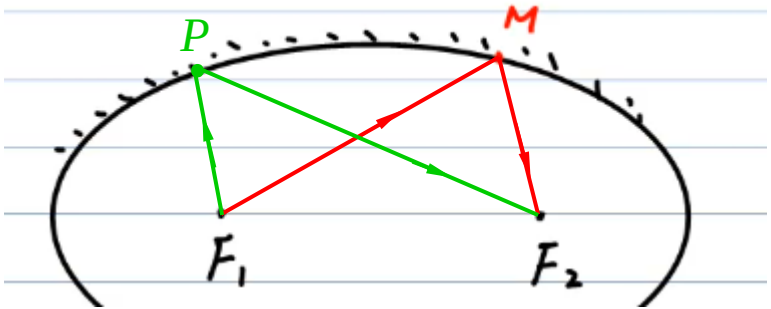
2. 几何光学的基本定律



椭面反射镜

$$F_1M + MF_2 = 2a \qquad F_1F_2 = 2c$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a^2 - c^2 = b^2$$

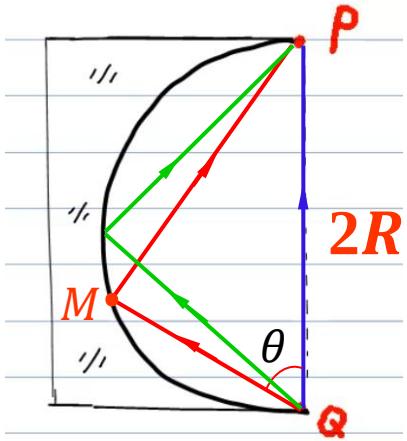


$$F_1M + MF_2 = C$$

$$F_1P + PF_2 = C$$

费马原理(稳定值)

2. 几何光学的基本定律



半球面反射镜

$$\delta = QM + MP$$

$$QM = 2R\cos\theta$$

$$MP = 2R\sin\theta$$

$$\delta = 2R\cos\theta + 2R\sin\theta$$

$$= 2R\,(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$\theta = 45^{\circ}$$

费马原理(极大值)

2. 几何光学的基本定律

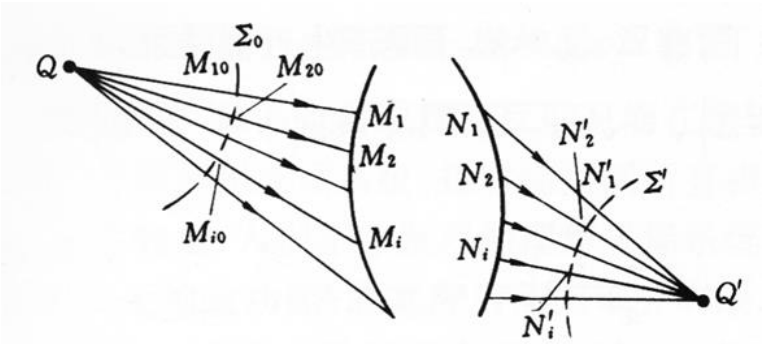
费马原理与成像

严格等光程 ⇔ 严格成像，

近似等光程 ⇔ 近似成像，

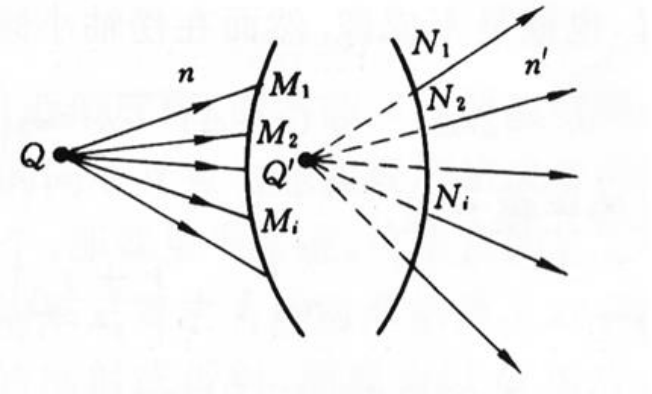
非等光程 ⇔ 不成像，

实 像



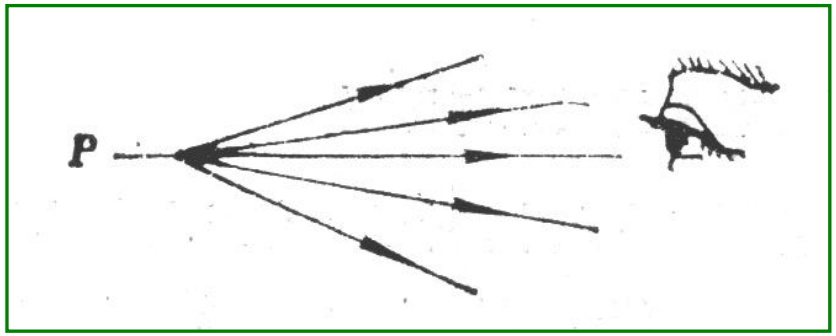
$$L(QM_1N_1Q') = L(QM_2N_2Q') = \cdots = L(QM_iN_iQ')$$

虚 像

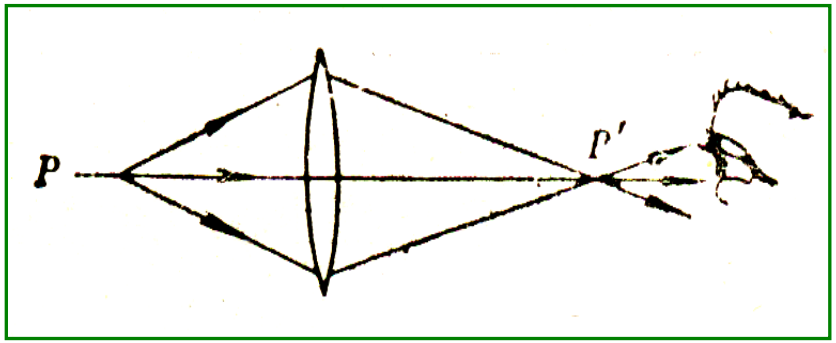


$$L(QM_1N_1) - L(N_1Q') = L(QM_2N_2) - L(N_2Q') = \cdots$$
$$= L(QM_iN_i) - L(N_iQ') = \ldots$$

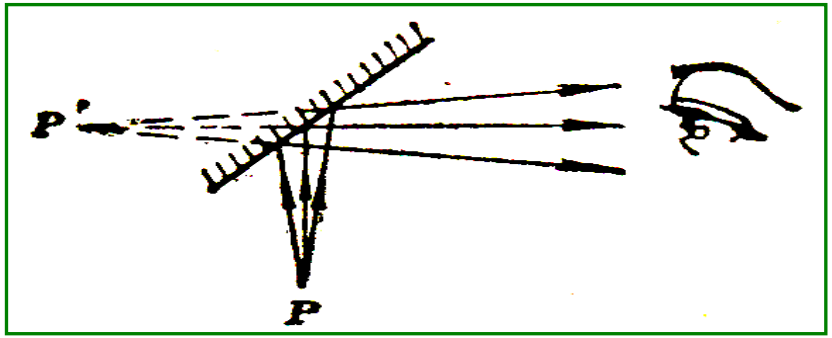
3. 物像虚实



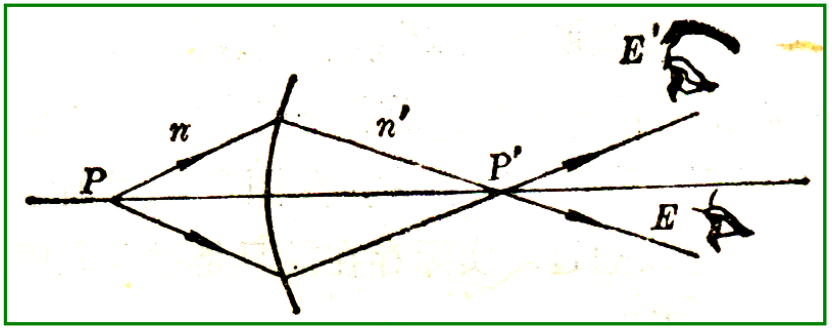
实物光线进入人眼



实像光线进入人眼



虚像光线进入人眼



人眼在像点发光范围内可见它

单选题 1分

设置

虚物点的形成

A 入射光线的交点

B 入射光线延长线的交点

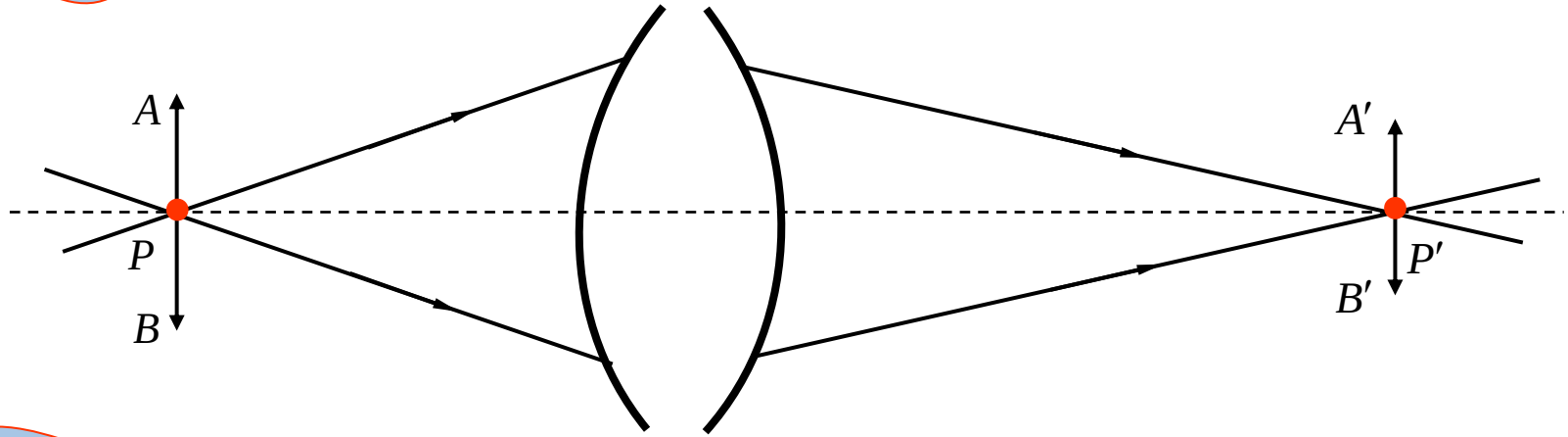
C 光线的交点

D 出射光线延长线的交点

提交

3. 物像虚实

物 像　**发出入射光线的是物，由出射光线形成的就是像。**



光学成像系统

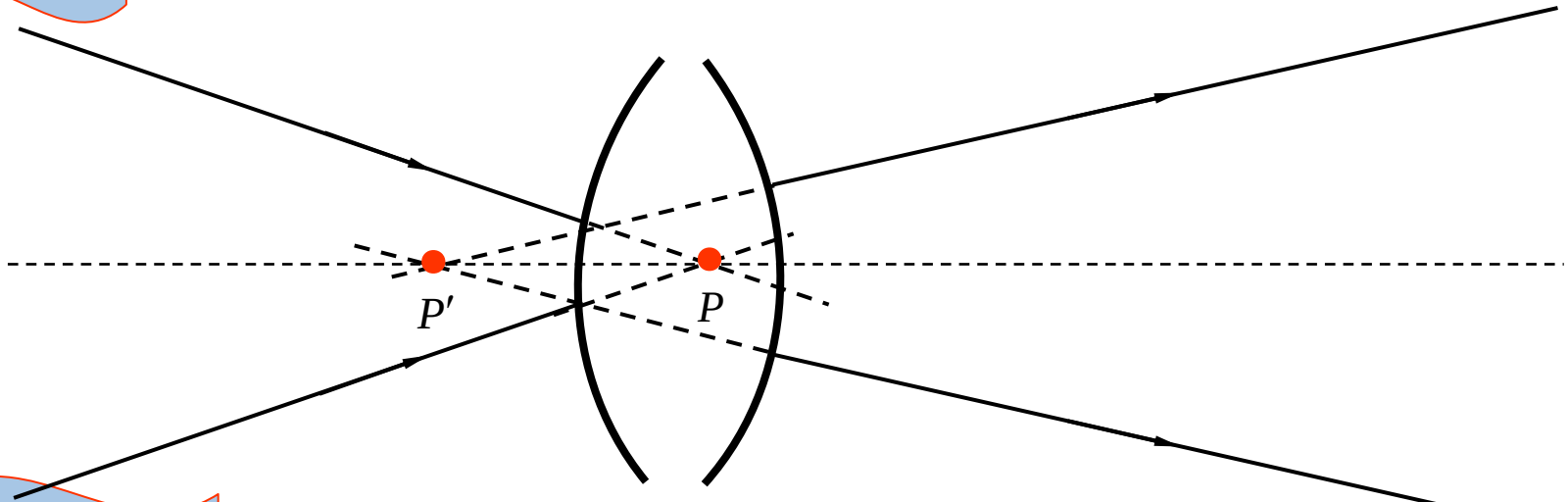
实物 实像

虚物 虚像

有光线真正的交点就是实。

3. 物像虚实

物 像　发出入射光波的是物，由出射光形成的就是像。



实物 实像　光线真正的交点就是实。

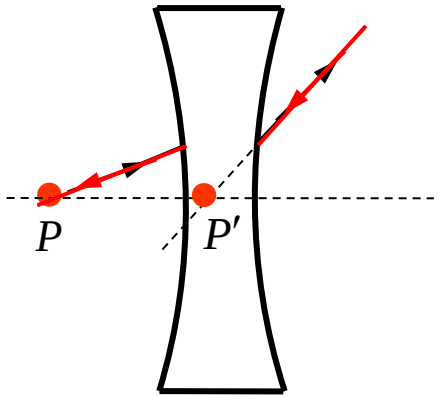
虚物 虚像　光线延长线的交点就是虚。

3. 物像虚实

- 虚物不能人为设定，只能由系统元件产生。
- 通常在光学设计中，**系统至少要有一个实像**，否则会抑制系统的功能。

物空间　物所在的空间。

像空间　像所在的空间。



- 物像空间是按照光线所在的空间来判断。
- 物像空间是可以无限延伸的。
- 共轭：互成物像关系。

4. 符号法则

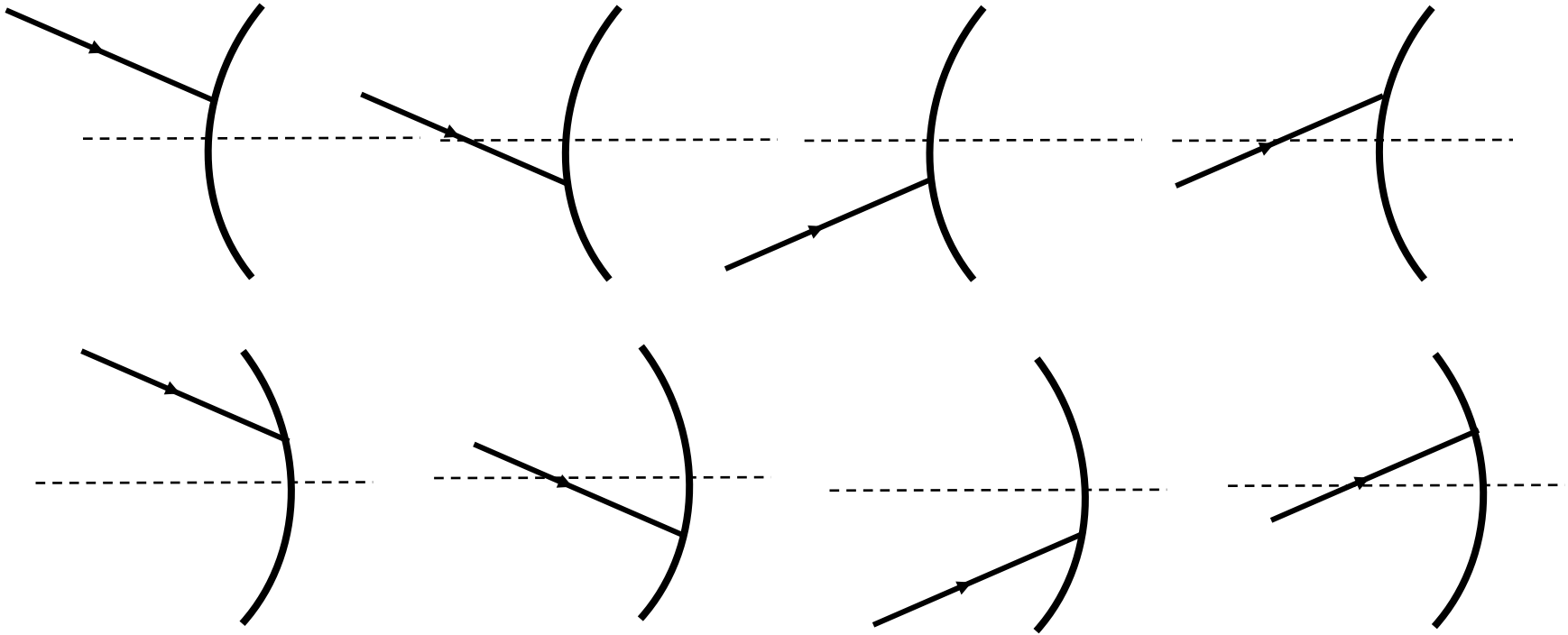
画：半径为5cm的球面？

画：入射角为30度一条光线？

4. 符号法则

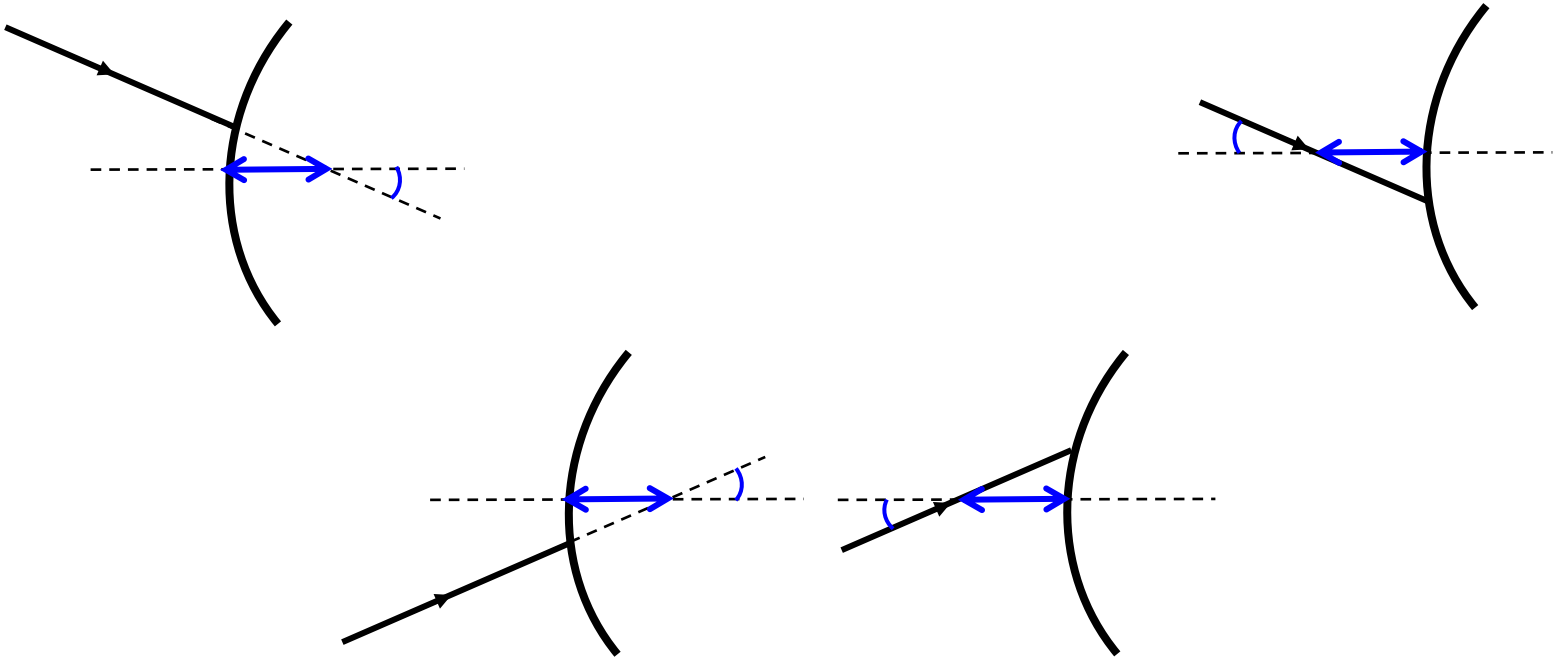
意义

唯一地确定光学系统的结构、光线的位置、物像的信息。



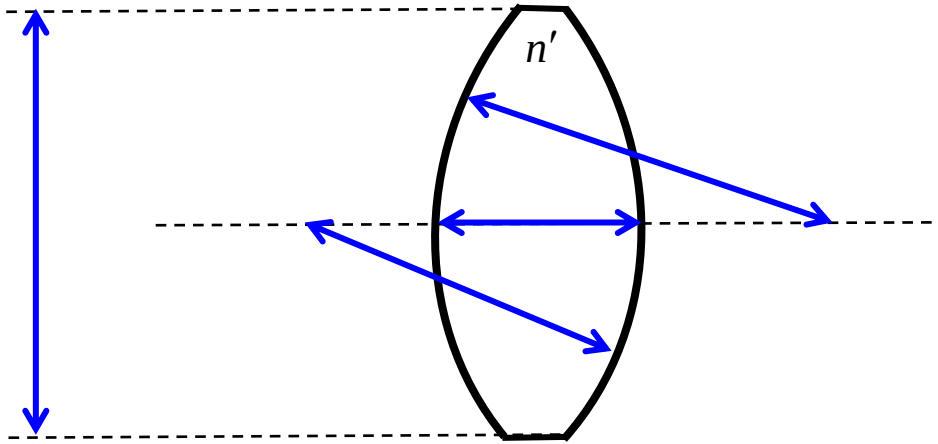
4. 符号法则

光线参数 唯一地确定一条光线位置所需要的参数。

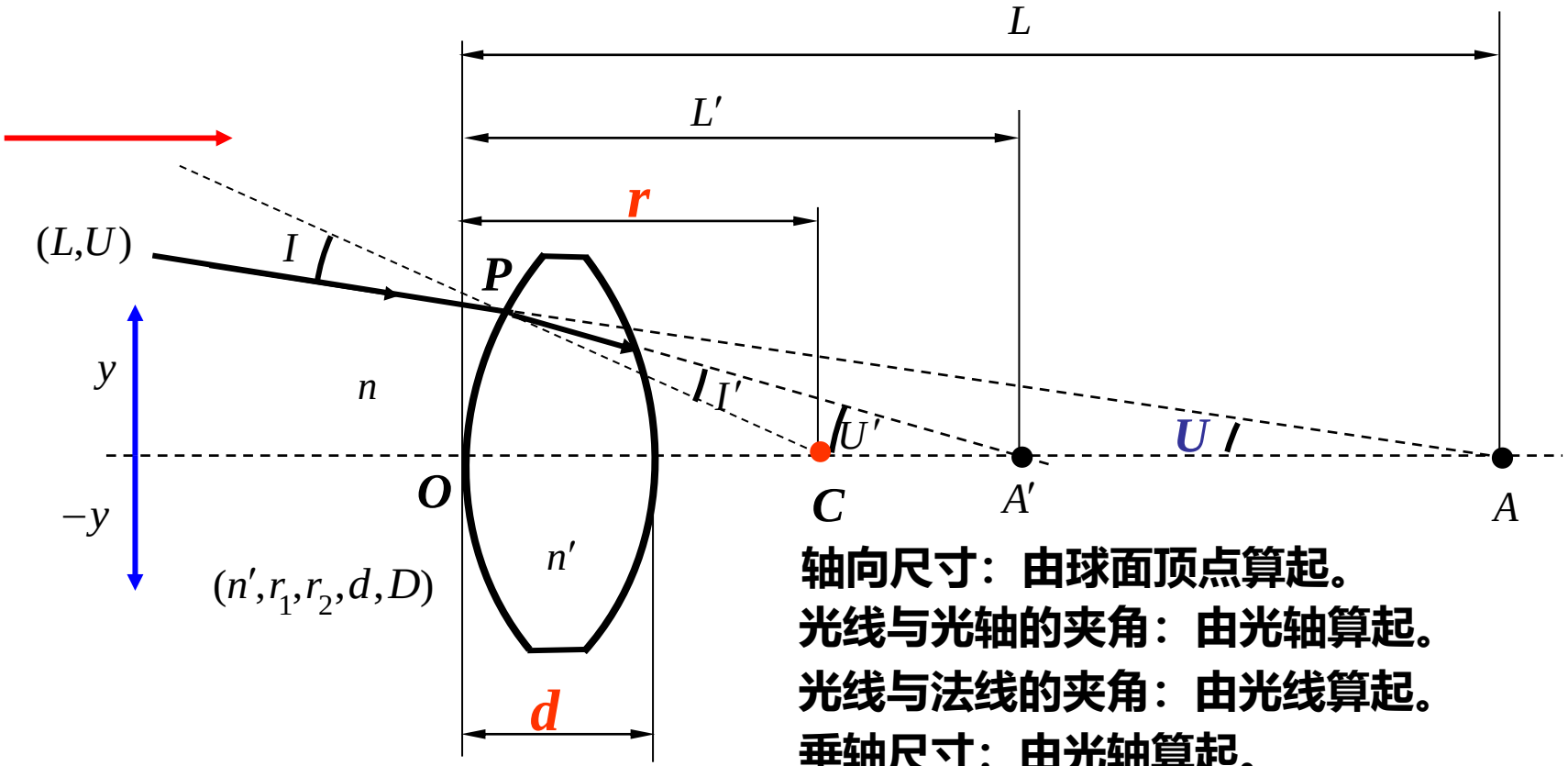


4. 符号法则

透镜参数



4. 符号法则



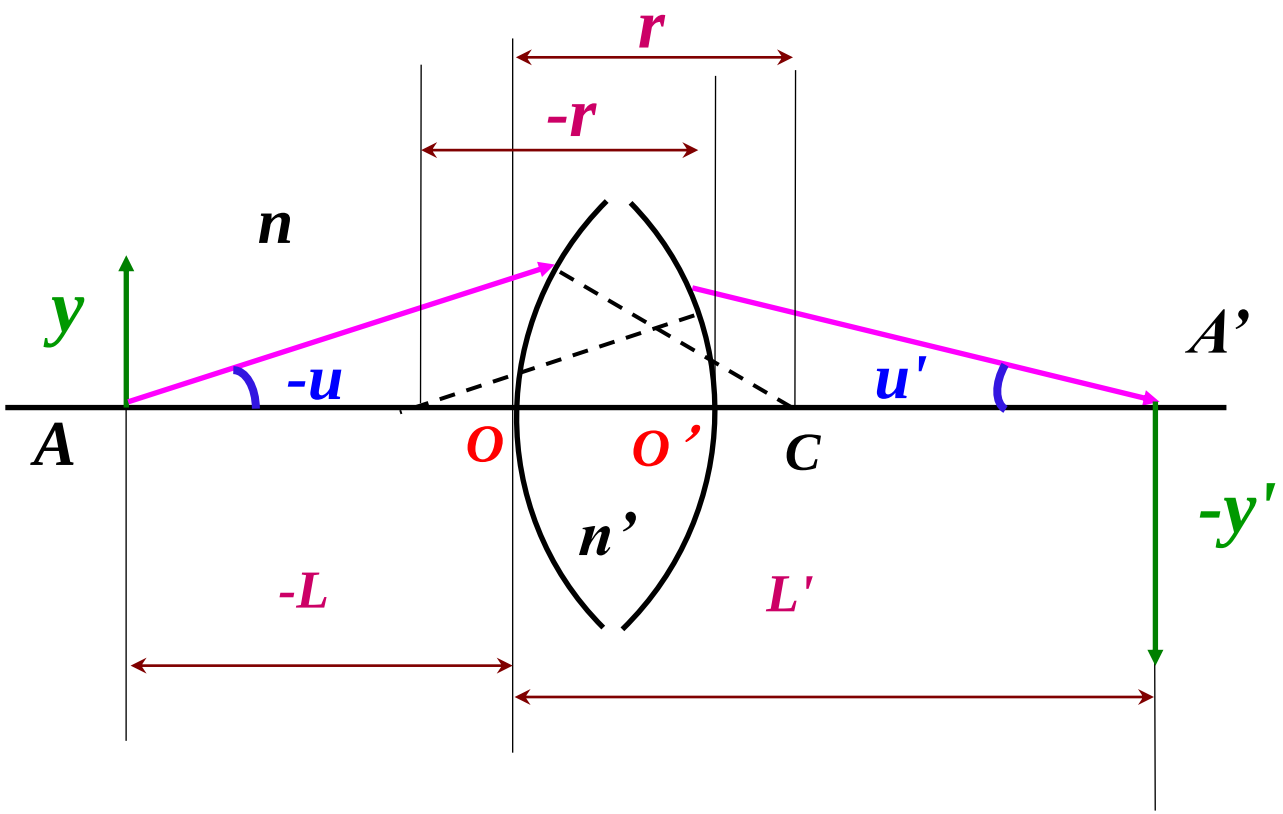
轴向尺寸：由球面顶点算起。

光线与光轴的夹角：由光轴算起。

光线与法线的夹角：由光线算起。

垂轴尺寸：由光轴算起。

4. 符号法则

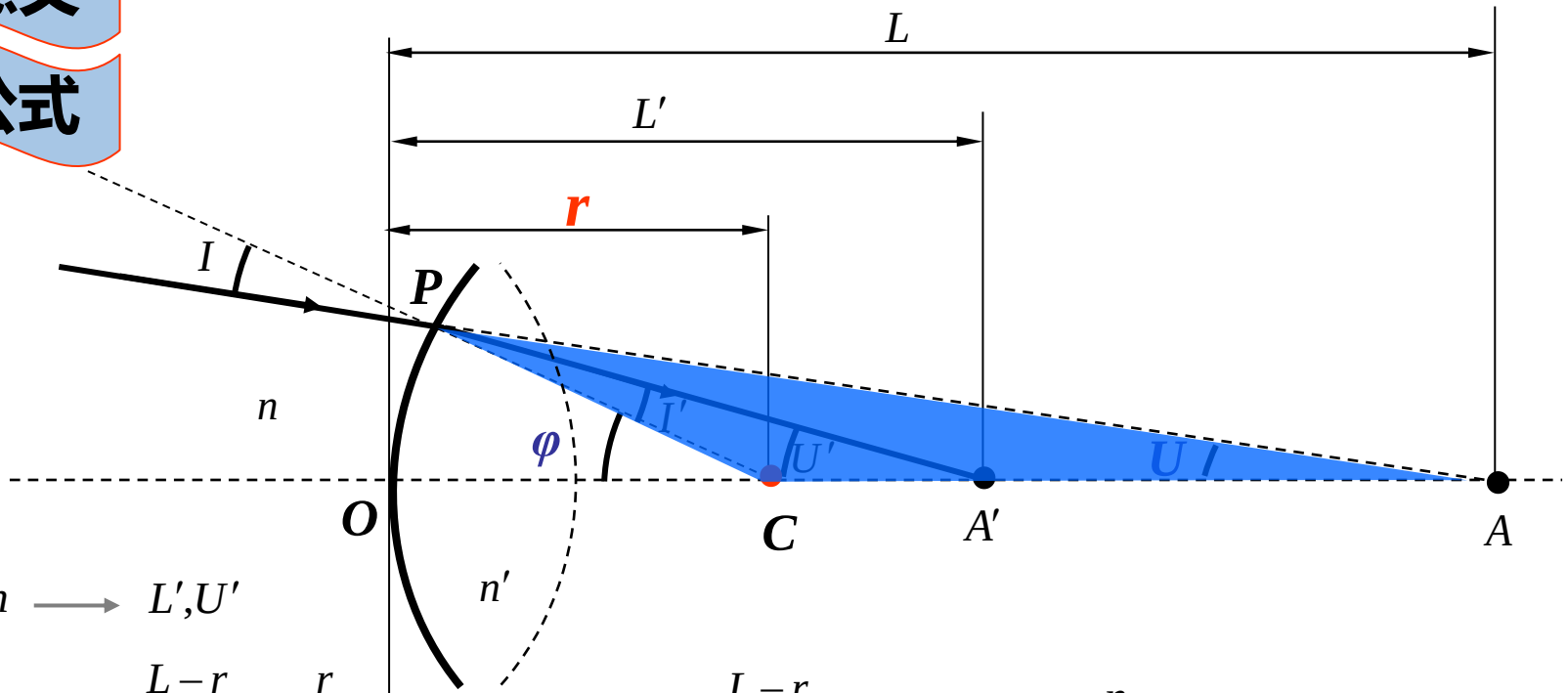


5.单个球面折射公式

意义

公式

最基本的成像元素，其成像规律也是最简单、最基本的。



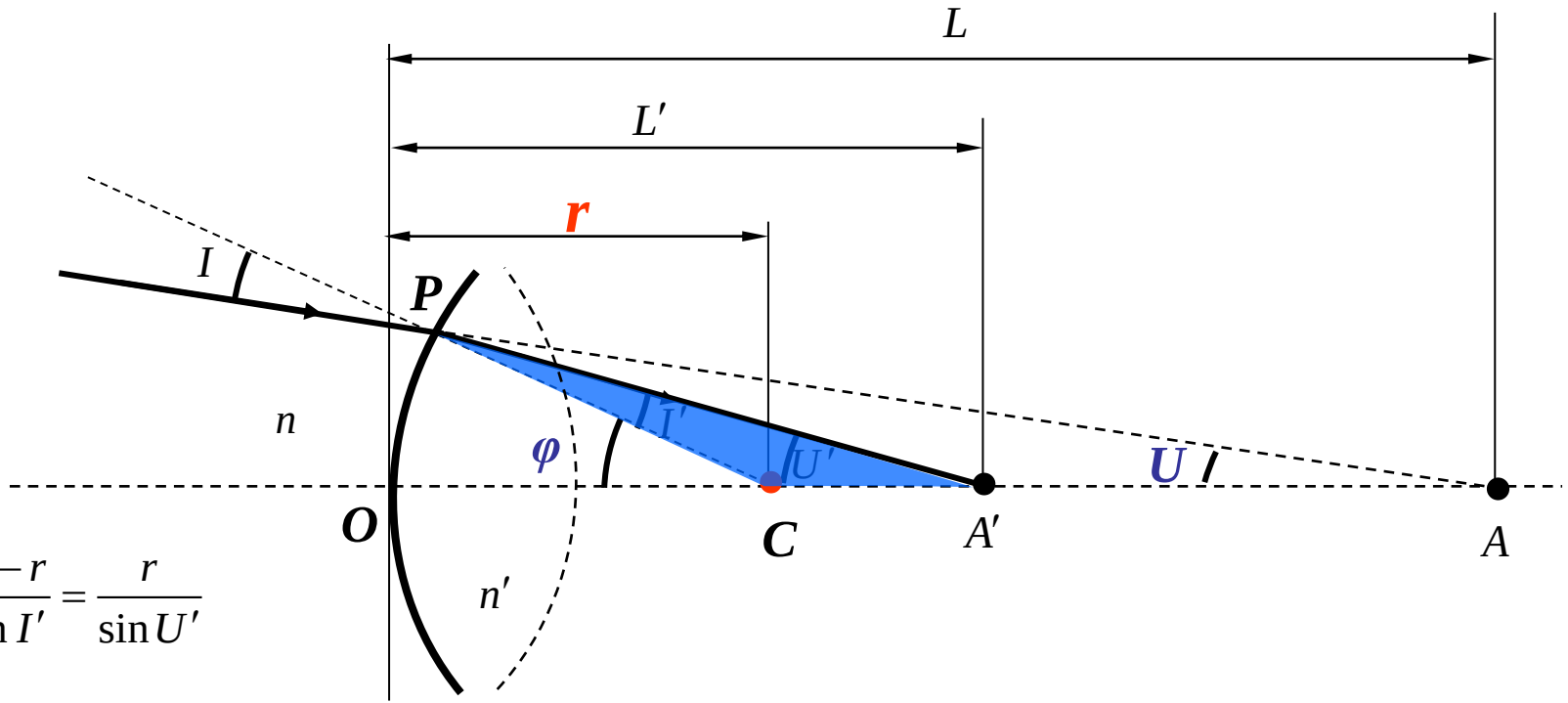
$n', r, L, U, n \longrightarrow L', U'$

$$\frac{L-r}{\sin I}=\frac{r}{\sin U}$$

$$\sin I=\frac{L-r}{r}\sin U \qquad \sin I'=\frac{n}{n'}\sin I \qquad \varphi=I'+U'=I+U$$

5.单个球面折射公式

思考：需要继续计算呢？

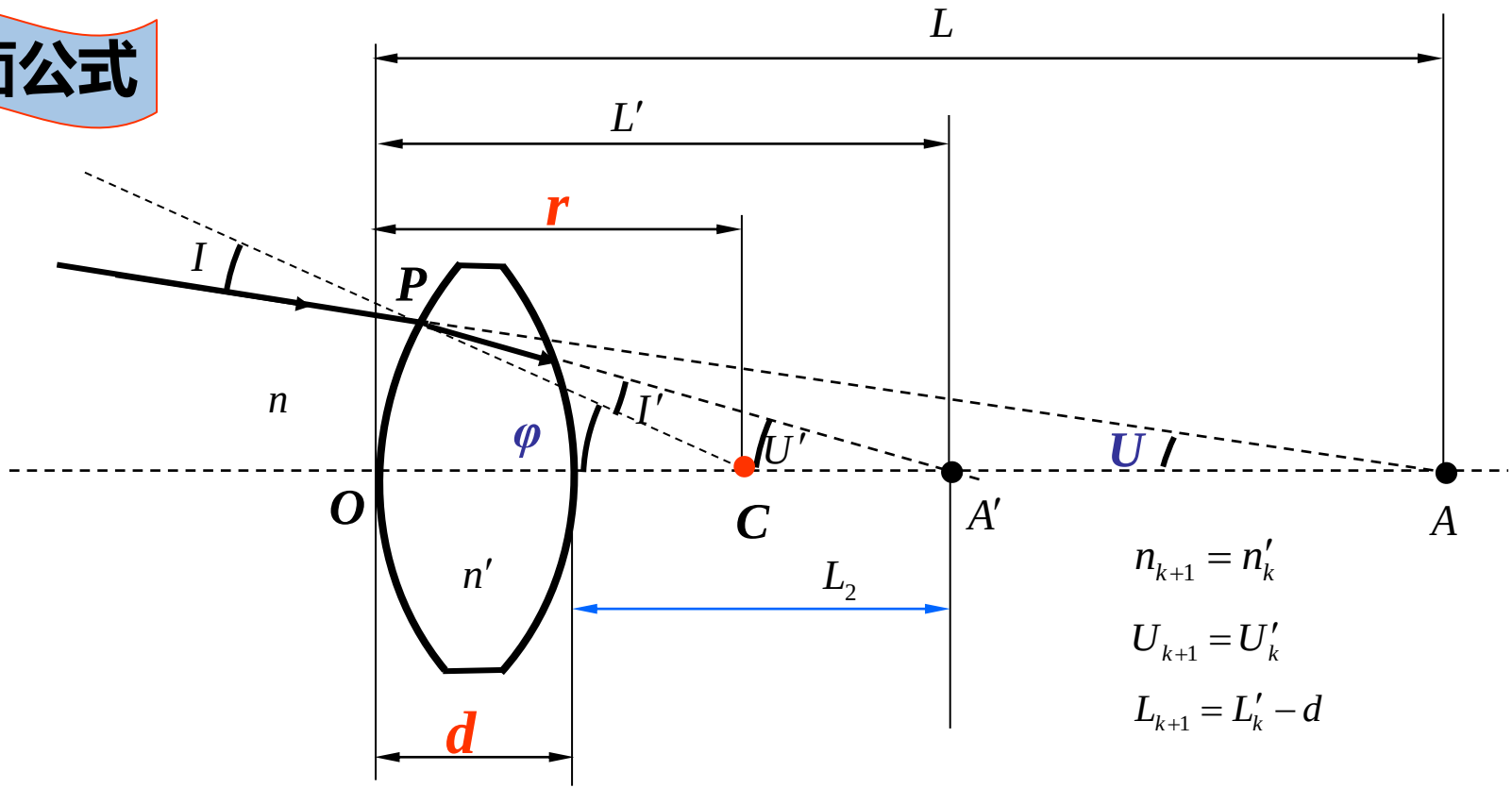


$$\frac{L'-r}{\sin I'}=\frac{r}{\sin U'}$$

$$L'=r\frac{\sin I'}{\sin U'}+r$$

5.单个球面折射公式

转面公式



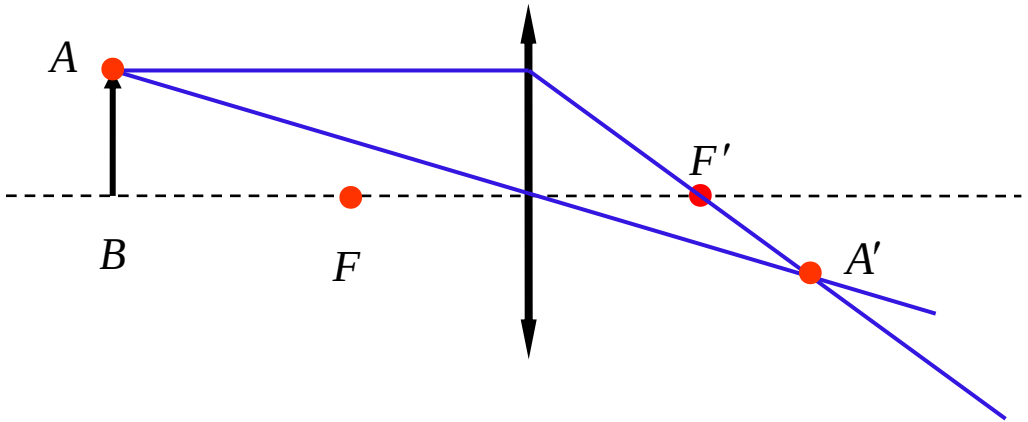
$$n_{k+1} = n'_k$$

$$U_{k+1} = U'_k$$

$$L_{k+1} = L'_k - d$$

5.单个球面折射公式

思考：什么情况下，一个物点可以成一个像点？



5.单个球面折射公式

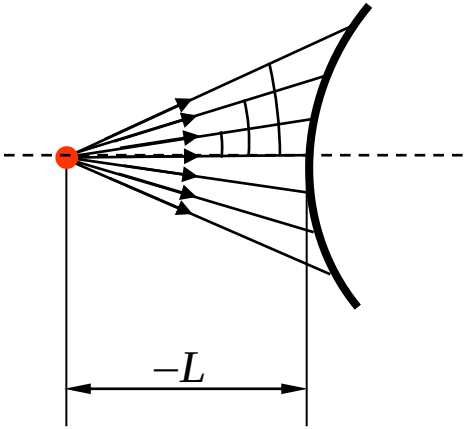
▲讨论

$$\sin I = \frac{L-r}{r}\sin U \longrightarrow I(L,U)$$

$$\sin I' = \frac{n}{n'}\sin I \longrightarrow I'(L,U)$$

$$U' = I + U - I' \longrightarrow U'(L,U)$$

$$L' = r\frac{\sin I'}{\sin U'} + r \longrightarrow L'(L,U)$$



▲当折射球面确定时，出射光线 L',与入射光线的位置、入射角有关。

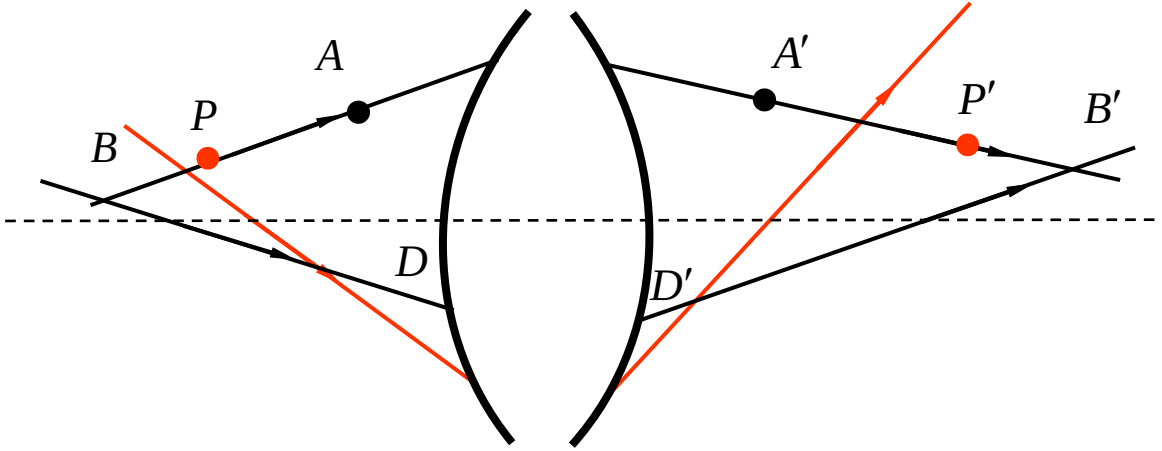
▲一个物点经过单个折射球面成像后，不会汇聚于一点。$L'(L)$

▲点物不能成点像。

5.单个球面折射公式

完善像

像与物只有大小的变化，而没有形状的改变。



完善成像的条件

物.像空间符合:点对应点

直线对应直线

平面对应平面

多选题 1分

设置

一个光学系统成完善像，则成像过程符合

A 一个物点对应唯一的像点

B 直线成像为直线

C 平面成像为平面

D 与物完全一样

提交

多选题 1分

设置

光线由一种介质1射向另一种介质2，若这两种介质的折射率不同，则

A 一定能进入介质2 中传播

B 若进入介质2 中，传播方向一定改变

C 若进入介质2中，传播速度一定改变

D 折射角一定大于入射角

提交

思考：完善像呢？

近轴光线 靠近光轴的光线，入射孔径角< 5^0 的光线。 **理想像**

$$\sin I=\frac{L-r}{r}\sin U \longrightarrow i=\frac{l-r}{r}u$$

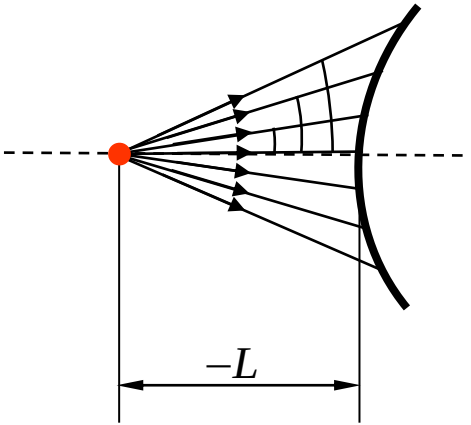
$$\sin I'=\frac{n}{n'}\sin I \longrightarrow i'=\frac{n}{n'}i$$

$$U'=I+U-I' \longrightarrow u'=i+u-i'$$

$$L'=r\frac{\sin I'}{\sin U'}+r \longrightarrow l'-r=r\frac{i'}{u'}$$

$$L'(L,U) \longrightarrow L'(L)$$

$$l'=r\frac{(\frac{n}{n'}i)}{i+\frac{ir}{l-r}-\frac{n}{n'}i}+r$$



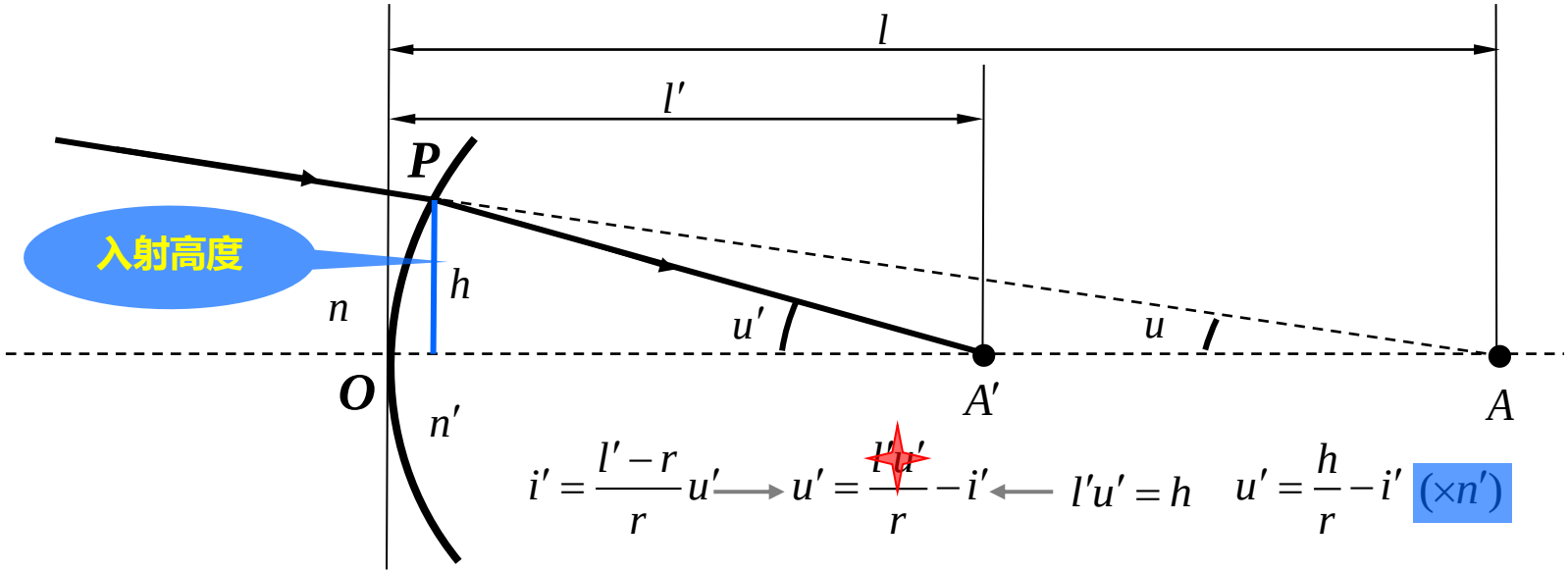
▲物体以近轴光成像时，所成的像为理想像。

思考：仅与物距有关，所以…？

6. 单个球面物像关系

条件 入射光为近轴光。 ▲物像位置关系 $n',r,n,l \longrightarrow l'$

$$i=\frac{l-r}{r}u \longrightarrow u=\frac{h}{r}-i \longleftarrow lu=h \quad u=\frac{h}{r}-i \ (\times n)$$

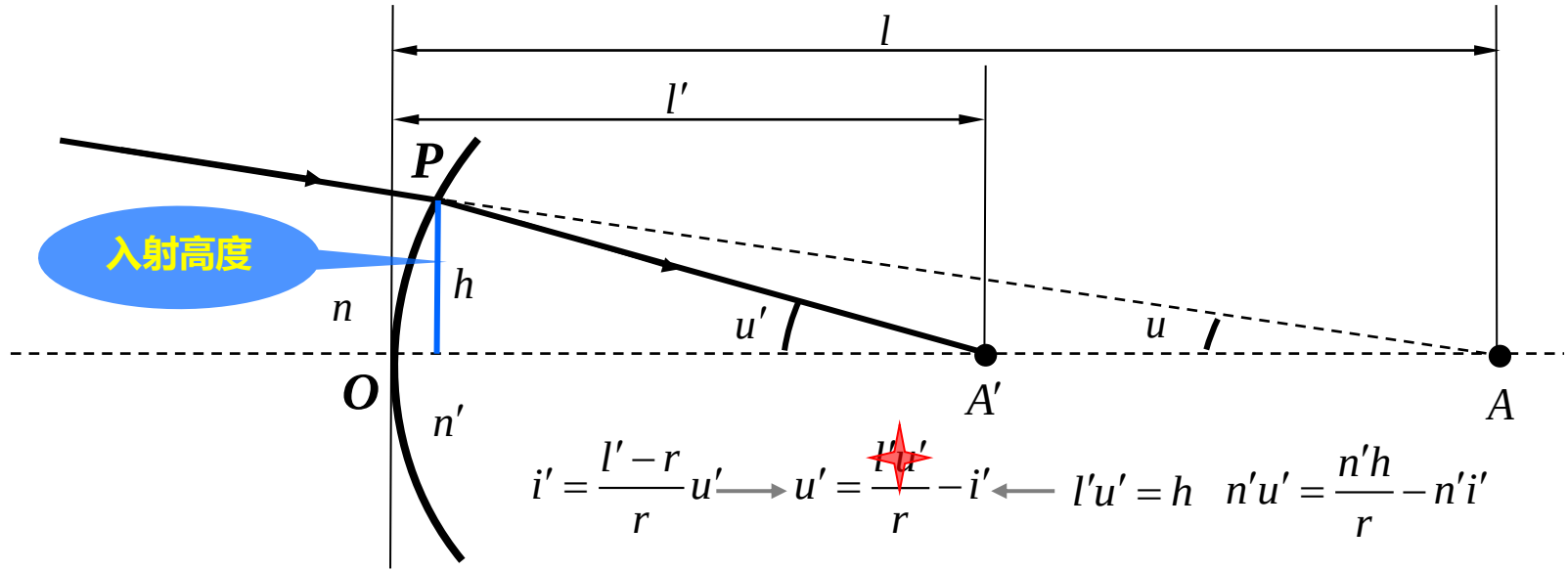


$$i'=\frac{l'-r}{r}u' \longrightarrow u'=\frac{h}{r}-i' \longleftarrow l'u'=h \quad u'=\frac{h}{r}-i' \ (\times n')$$

6. 单个球面物像关系

条件 入射光为近轴光。▲物像位置关系 $n', r, n, l \longrightarrow l'$

$$i = \frac{l-r}{r}u \longrightarrow u = \frac{h}{r} - i \longleftarrow lu = h \qquad nu = \frac{nh}{r} - ni \qquad n'u' - nu = \frac{h}{r}(n'-n) - (n'i' - ni)$$



$$i' = \frac{l'-r}{r}u' \longrightarrow u' = \frac{h}{r} - i' \longleftarrow l'u' = h \qquad n'u' = \frac{n'h}{r} - n'i'$$

6. 单个球面物像关系

条件 入射光为近轴光。▲物像位置关系 $n', r, n, l \longrightarrow l'$

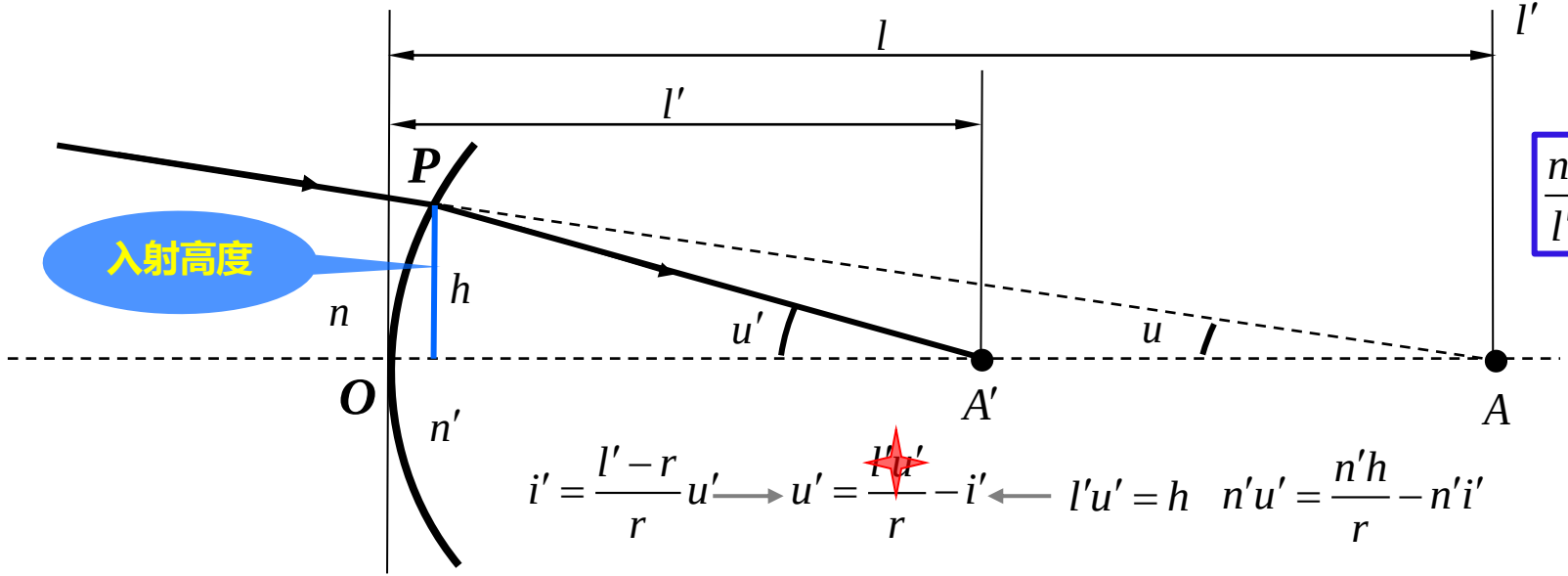
$$n'u' - nu = \frac{h}{r}(n' - n)$$

$$n'\frac{u'}{h} - n\frac{u}{h} = \frac{1}{r}(n' - n)$$

$$n'\frac{1}{l'} - n\frac{1}{l} = \frac{1}{r}(n' - n)$$

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}$$

$$i = \frac{l - r}{r}u \longrightarrow u = \frac{h}{r} - i \longleftarrow lu = h \qquad nu = \frac{nh}{r} - ni$$



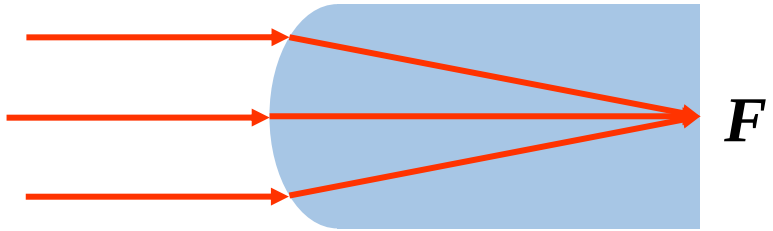
$$i' = \frac{l' - r}{r}u' \longrightarrow u' = \frac{h}{r} - i' \longleftarrow l'u' = h \qquad n'u' = \frac{n'h}{r} - n'i'$$

6. 单个球面物像关系

例：如图所示，有一折射率为1.5的玻璃棒，一端为r=30cm的光滑凸球面，另一端为磨砂平面，试问该棒多长时，正好使无限远处物体经球面后清晰的成像在磨砂平面上?

根据单球面折射公式：

$$\frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}$$



代入数据：

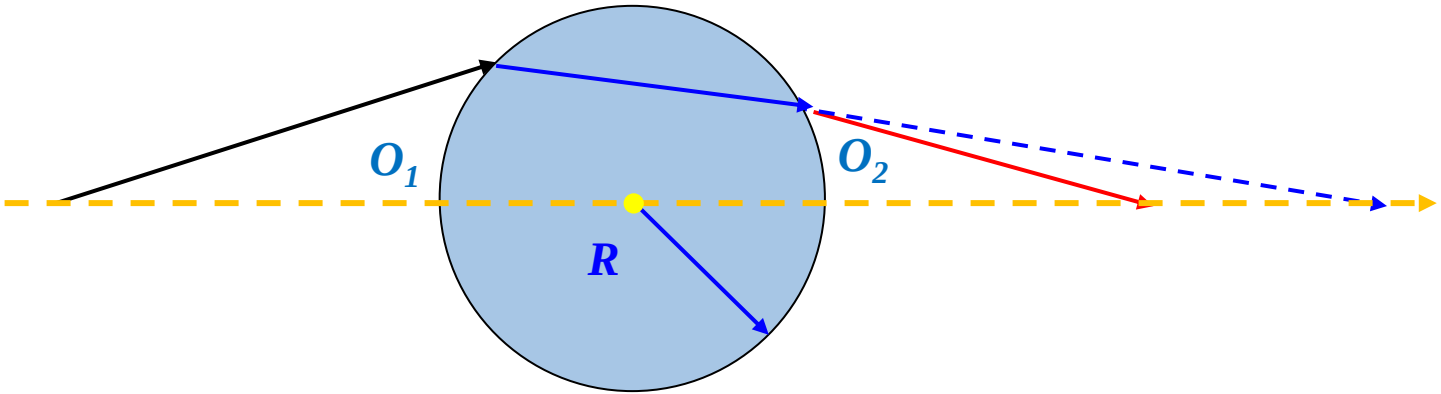
$$\frac{1.5}{l'}-\frac{1}{\infty}=\frac{1.5-1}{30}$$

解得：

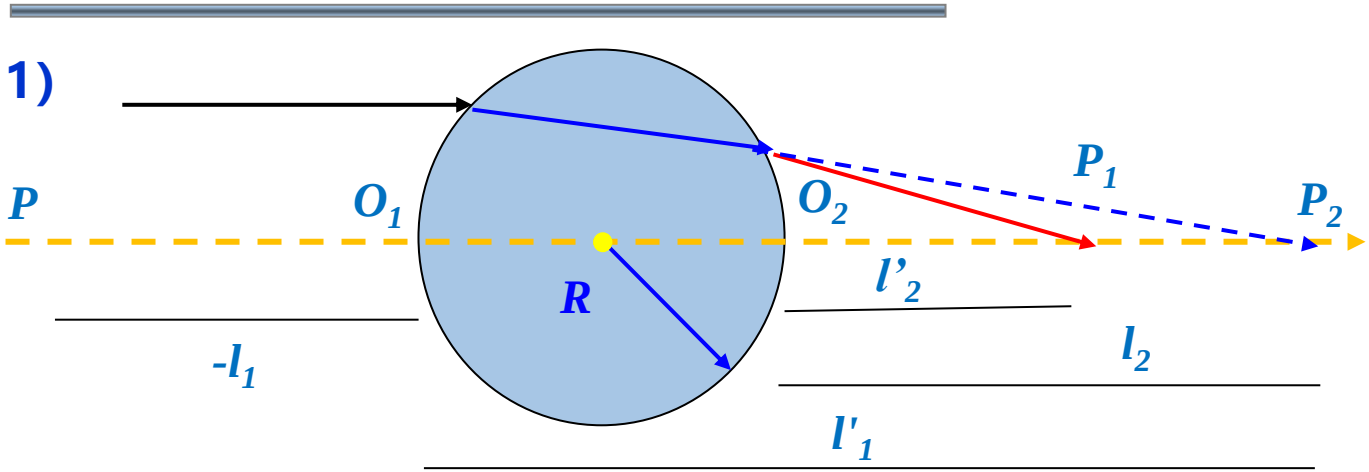
$$l'=90\ cm$$

例：如图所示，玻璃球 (n=1.5) 半径为R， 置于空气中，问：

1）无穷远处的物成像在何处；2）物在球前2R处，成像在何处?



6. 单个球面物像关系



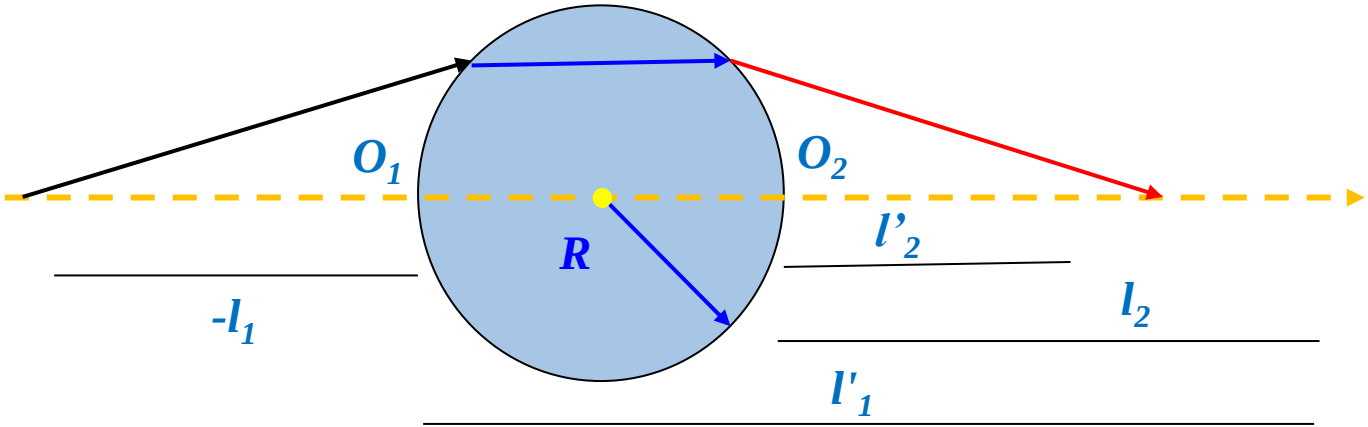
$$\frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}$$

第一次成像： $l_1=\infty \quad r_1=R \quad n_1=1 \quad n_1'=1.5 \Rightarrow l_1'=3R$

第二次成像： $l_2=R \quad r_2=-R \quad n_2=1.5 \quad n_2'=1 \Rightarrow l_2'=R/2$

6. 单个球面物像关系

2)



6. 单个球面物像关系

阿贝不变量

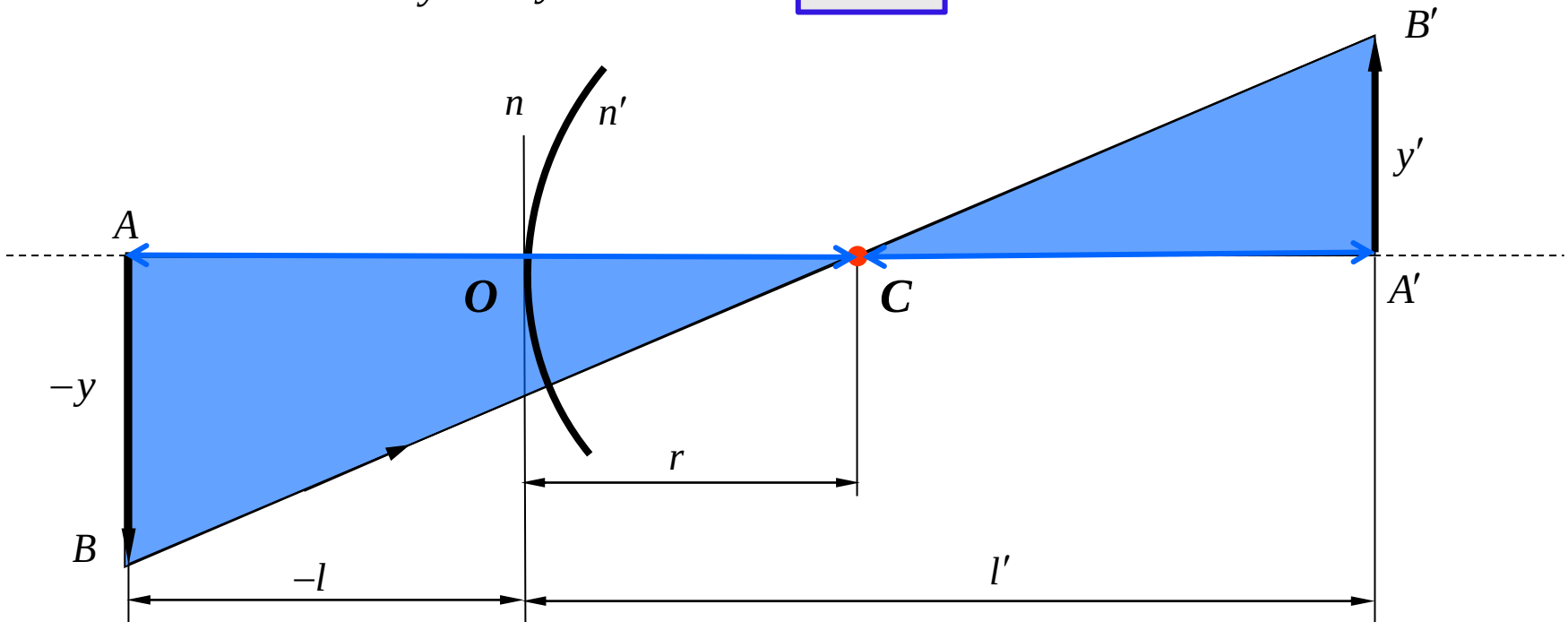
$$Q = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l'}\right) = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right) \longleftarrow n'\frac{1}{l'} - n\frac{1}{l} = \frac{1}{r}(n' - n)$$

$$\frac{1}{r}(n' - n) = \phi$$ **光焦度** ⟹ **表征折射球面的光学特性**

思考，若 $l = -\infty$?

6. 单个球面物像关系

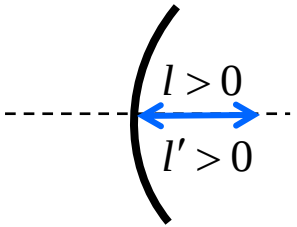
▲垂轴放大倍率 $\beta=\dfrac{y'}{y}$ $\dfrac{y'}{-y}=\dfrac{l'-r}{-l+r}$ $\boxed{\beta=\dfrac{nl'}{n'l}}$ 思考：符号的意义？



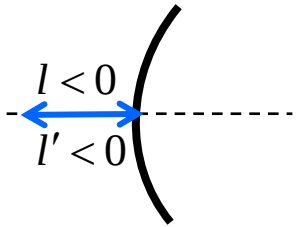
6. 单个球面物像关系

(1) $\beta = \frac{y}{y'} = \frac{nl'}{n'l} > 0$ 正像；物像虚实相反；

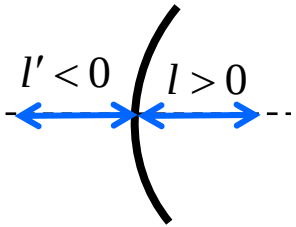
$\beta = \frac{y}{y'} = \frac{nl'}{n'l} < 0$ 倒像；物像虚实一致；



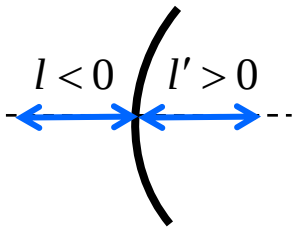
虚物实像



实物虚像



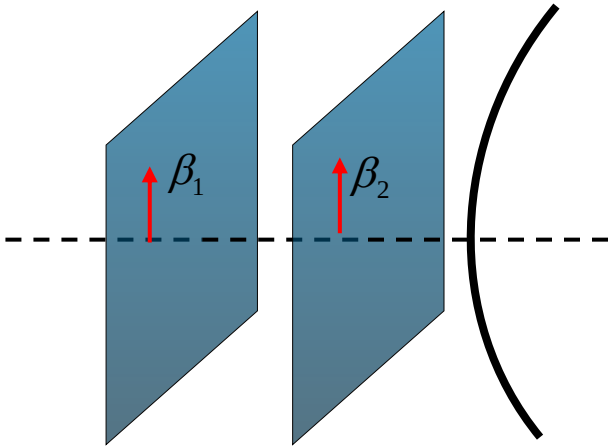
虚物虚像



实物实像

6. 单个球面物像关系

（2） $|\beta|>1$ 放大；　　$|\beta|<1$ 缩小；



（3） $\beta=\dfrac{nl'}{n'l}$ 垂轴放大倍率随共轭面改变；

一对垂轴共轭面内的垂轴放大倍率相同。

投票 最多可选1项

设置

垂直于光轴的同一平面上的各部分放大率相同

A 正确

B 不正确

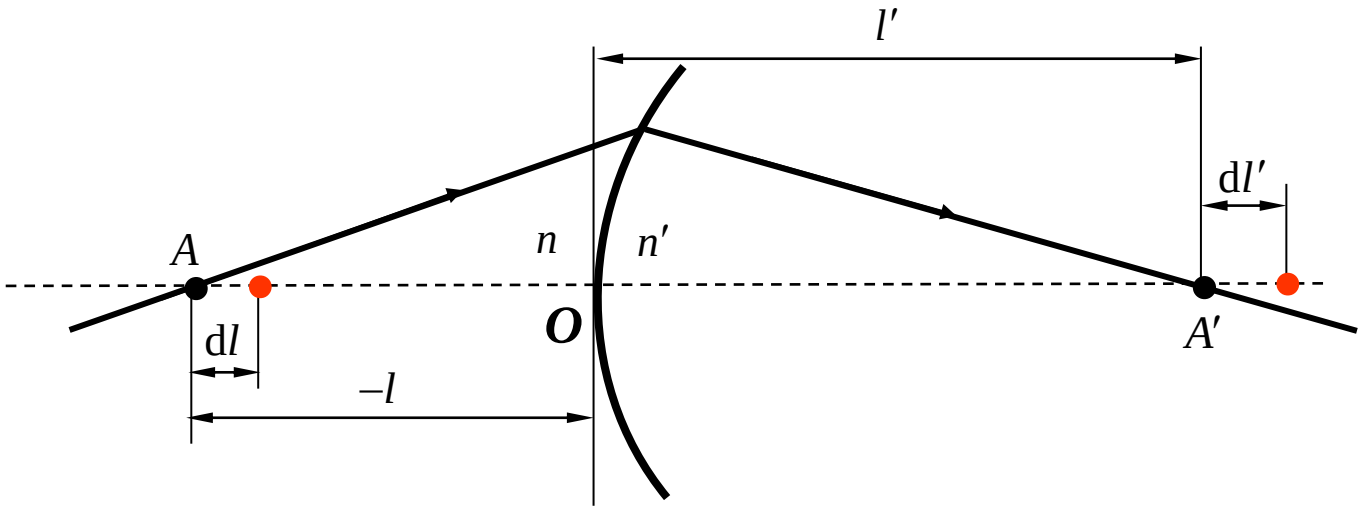
提交

6. 单个球面物像关系

▲轴向放大倍率　光轴上一对共轭点沿轴向移动量之间比例关系

$$\beta=\frac{nl'}{n'l}\qquad \alpha=\frac{\mathrm{d}l'}{\mathrm{d}l}=\frac{nl'^2}{n'l^2}=\frac{n'}{n}\beta^2$$

$$-n'\frac{\mathrm{d}l'}{l'^2}+n\frac{\mathrm{d}l}{l^2}=0 \longleftarrow \frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}$$



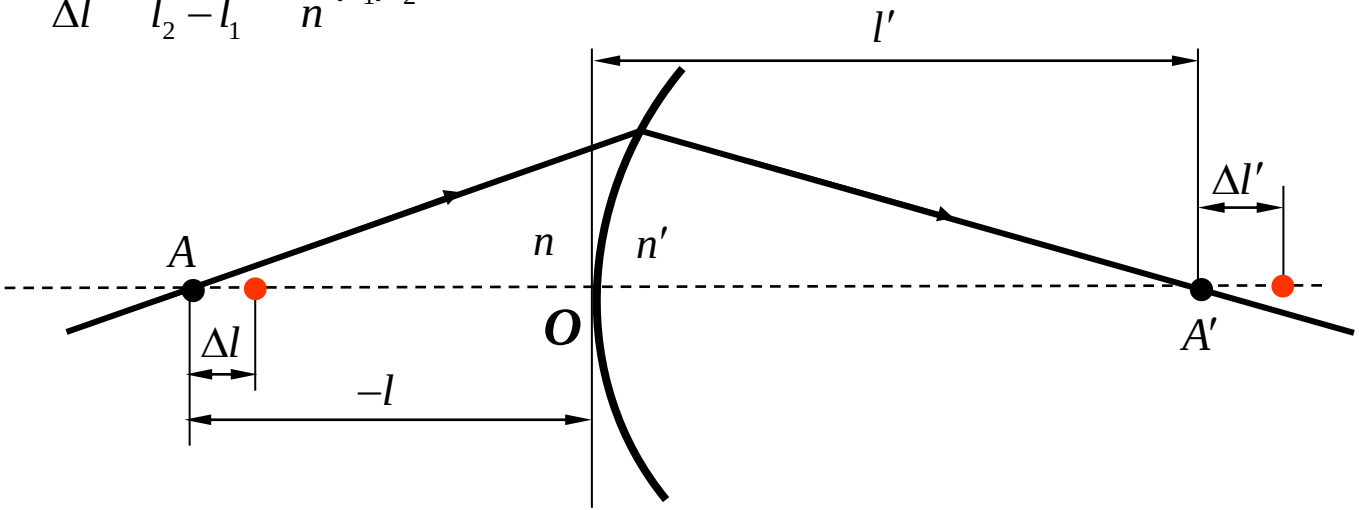
6. 单个球面物像关系

▲轴向放大倍率　光轴上一对共轭点沿轴向移动量之间比例关系

$$\beta=\frac{nl'}{n'l}\qquad \alpha=\frac{\mathrm{d}l'}{\mathrm{d}l}=\frac{nl'^2}{n'l^2}=\frac{n'}{n}\beta^2$$

$$-n'\frac{\mathrm{d}l'}{l'^2}+n\frac{\mathrm{d}l}{l^2}=0 \longleftarrow \frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}$$

$$\alpha=\frac{\Delta l'}{\Delta l}=\frac{l_2'-l_1'}{l_2-l_1}=\frac{n'}{n}\beta_1\beta_2$$



6. 单个球面物像关系

▲轴向放大倍率　光轴上一对共轭点沿轴向移动量之间比例关系

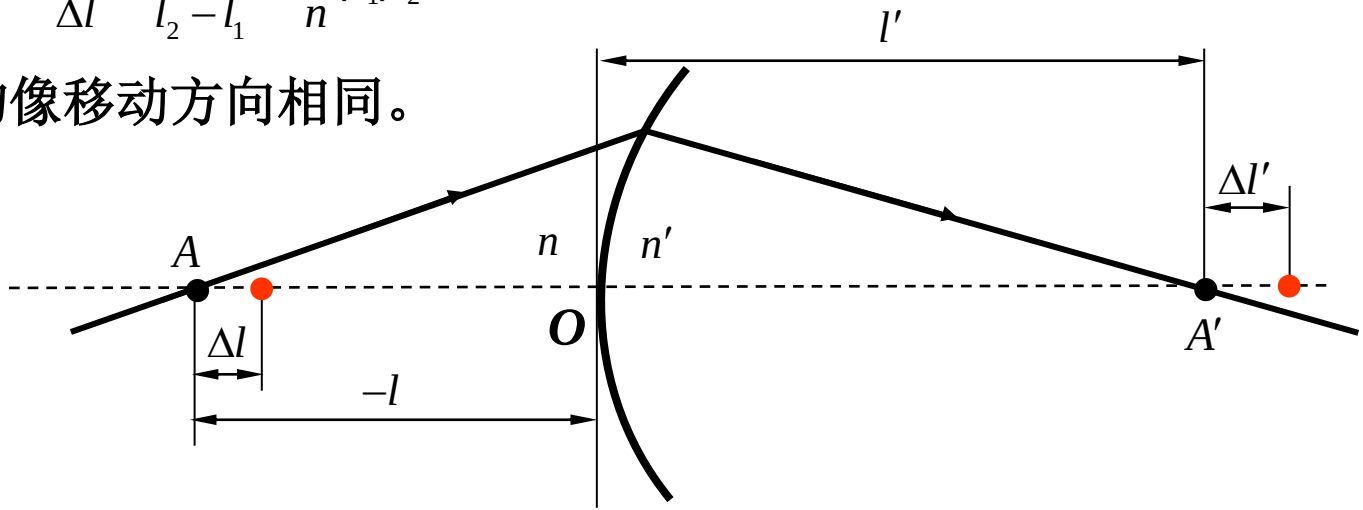
$$\beta=\frac{nl'}{n'l}\qquad \alpha=\frac{\mathrm{d}l'}{\mathrm{d}l}=\frac{nl'^2}{n'l^2}=\frac{n'}{n}\beta^2$$

$$-n'\frac{\mathrm{d}l'}{l'^2}+n\frac{\mathrm{d}l}{l^2}=0 \longleftarrow \frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}$$

$$\alpha=\frac{\Delta l'}{\Delta l}=\frac{l_2'-l_1'}{l_2-l_1}=\frac{n'}{n}\beta_1\beta_2$$

(1) $\alpha>0$　物像移动方向相同。

(2) $\alpha\neq\beta$



6. 单个球面物像关系

▲轴向放大倍率　光轴上一对共轭点沿轴向移动量之间比例关系

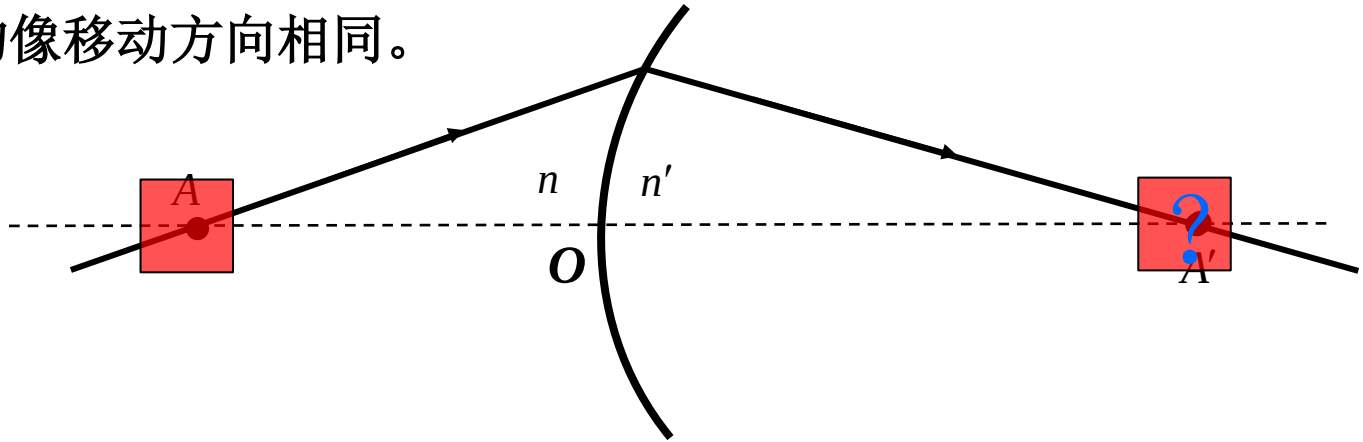
$$\beta=\frac{nl'}{n'l}\qquad \alpha=\frac{\mathrm{d}l'}{\mathrm{d}l}=\frac{nl'^2}{n'l^2}=\frac{n'}{n}\beta^2$$

$$-n'\frac{\mathrm{d}l'}{l'^2}+n\frac{\mathrm{d}l}{l^2}=0 \longleftarrow \frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}$$

$$\alpha=\frac{\Delta l'}{\Delta l}=\frac{l_2'-l_1'}{l_2-l_1}=\frac{n'}{n}\beta_1\beta_2$$

(1) $\alpha>0$　物像移动方向相同。

(2) $\alpha\neq\beta$

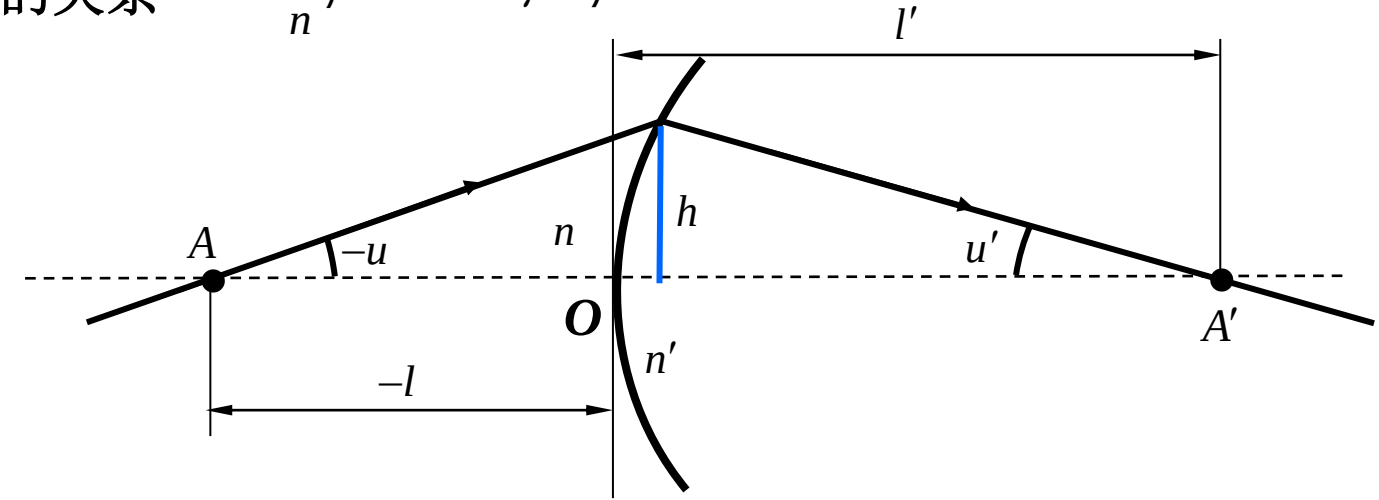


6. 单个球面物像关系

▲角放大倍率　近轴区一对共轭光线像方孔径角与物方孔径角之比。

$$\beta = \frac{nl'}{n'l} \qquad \gamma = \frac{u'}{u} = \frac{l}{l'} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}$$

▲三种放大倍率的关系　$\alpha = \frac{n'}{n}\beta^2$　　$\alpha \cdot \gamma = \beta$



6. 单个球面物像关系

例题：已知一个光学系统的结构参数，r = 36.480 mm，n=1，n'=1.5163

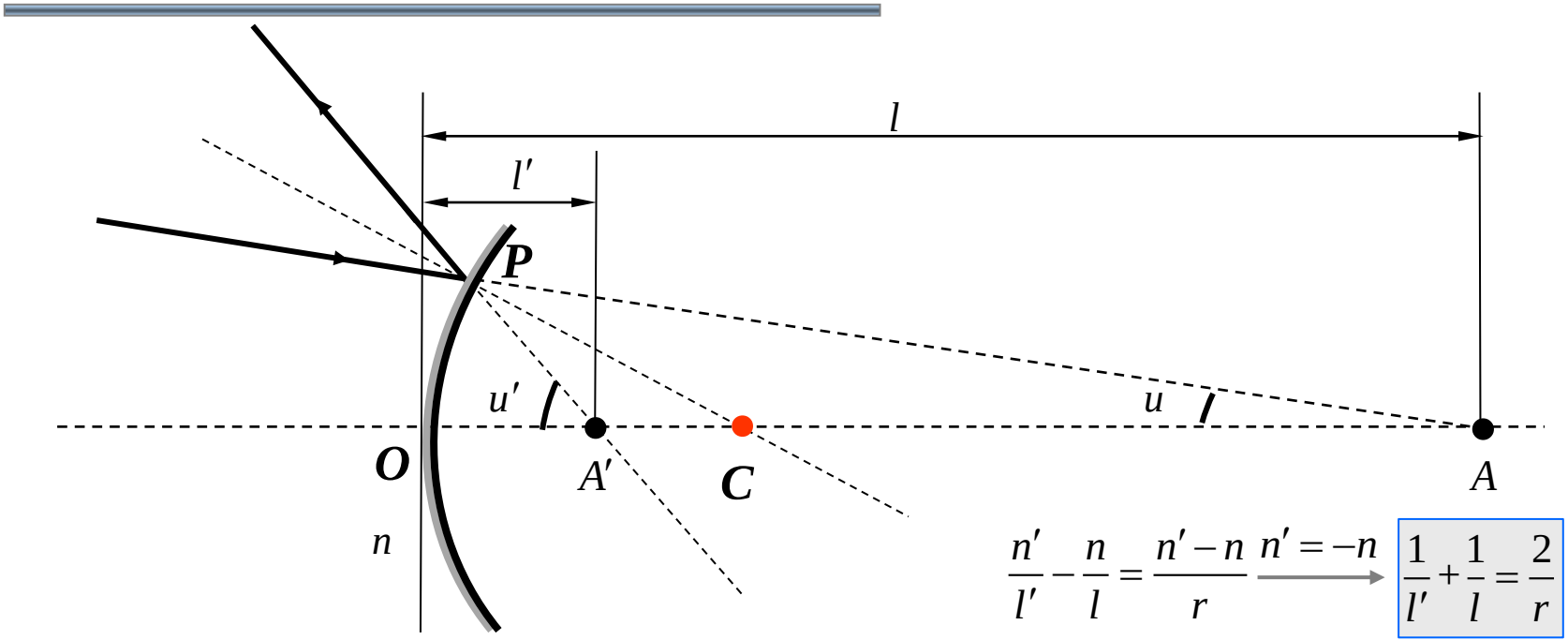
已知一物体 y =20 mm，l = -240 mm， l' =151.83 8mm，

现求 β 和 y' (横向放大率与像的大小)

解： $$\beta = \frac{nl'}{n'l} = \frac{1\times 151.838}{1.5163\times(-240)} \approx -0.42$$

$$y' = \beta \cdot y = -0.42 \times 20 = -8.4\ mm$$

反射球面



$$\frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}\ \xrightarrow{n'=-n}\ \boxed{\frac{1}{l'}+\frac{1}{l}=\frac{2}{r}}$$

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{nl'}{n'l}\ \xrightarrow{n'=-n}$$

$$\beta=\frac{y'}{y}=-\frac{l'}{l}$$

$$\alpha=\frac{dl'}{dl}=-\beta^2$$

$$\gamma=\frac{u'}{u}=-\frac{1}{\beta}$$

拉赫不变量

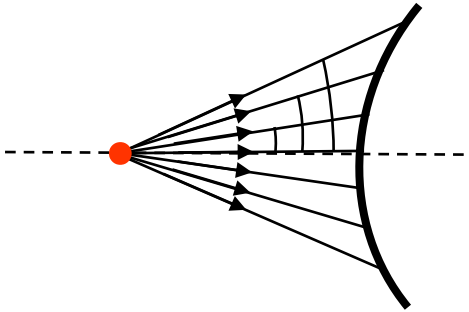
$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{nl'}{n'l}$$

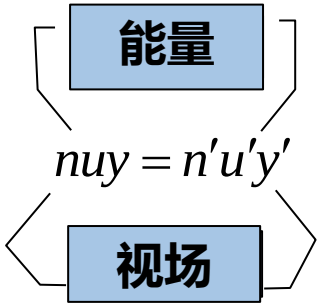
$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{l}{l'}$$

$$\longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{nu}{n'u'} \longrightarrow nuy = n'u'y' = J$$

拉赫不变量

拉格朗日-赫姆霍兹恒等式





▲像差与孔径(u)与视场(y)有关。像差越大，系统结构越复杂，造价越高。

▲拉赫不变量的重要性： 它数值的大小决定了光学系统设计的难易程度。

本章小结

基本概念

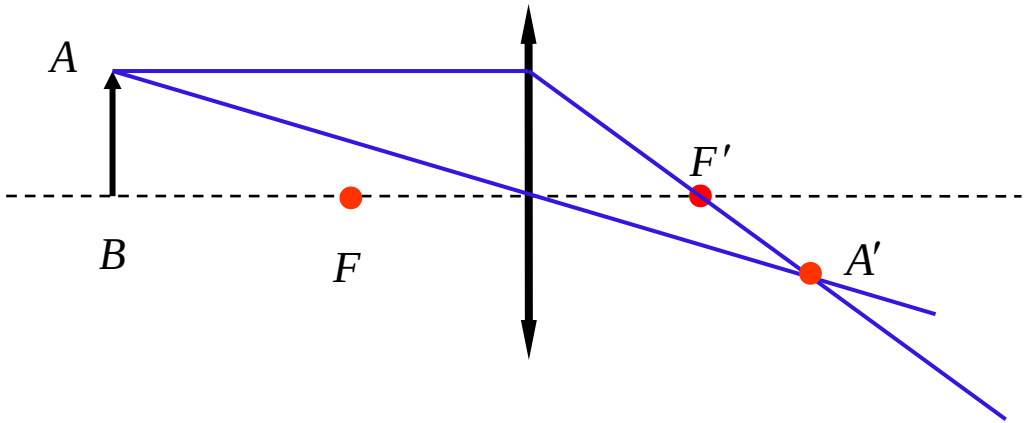
物、像　虚、实　物空间、像空间　共轭　完善像

垂轴放大倍率、轴向放大倍率、角放大倍率　拉赫不变量

基本方法

如何成完善像?

近轴



本章小结

共轴球面系统求解完善像的方法

▲对于单个球面系统，应用 $\frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}$ $\beta=\frac{nl'}{n'l}$ $\longrightarrow l', y'$

▲对于共轴球面系统，依次应用 $\frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}$

$$\beta=\frac{nl'}{n'l} \longrightarrow l'_k, y'_k$$

及转面公式 $n_{k+1}=n'_k$

$$u_{k+1}=u'_k$$

$$l_{k+1}=l'_k-d$$