2024级数试加试喵

整理人：HindCycen

2026年6月25日

1. 设 $z=x+iy$, x,y 均为有理数，且 $|z|=1$. 求证：对于任意整数n, 都有$|z^{2n}-1|$是有理数。

2. 设 $f:X\to Y$,证明：f是单射的充分必要条件是对于任意$A\subseteq X$ 有 $f^{-1}(f(A))=A$.

3. 设 I是一个包含0的开区间，定义

$$f(x)=\inf\{r>0:\frac{x}{r}\in I\}.$$

   - (1) 对于任意$\lambda>0$, 有$f(\lambda x)=\lambda f(x)$.
   - (2) f 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数。

4. 设$\{x_n\},\{y_n\}$是无穷大量。证明：对于任意$A>0$, 存在m,n两个正整数，使得$|x_m-x_n|>A,|y_m-y_n|>A$同时成立。

5. 对于任意两个有限集合$A,B\subseteq\mathbb{R}$，定义$E(A,B)$是

$$\{(a_1,a_2,b_1,b_2)\in A\times A\times B\times B:a_1+b_1=a_2+b_2\}.$$

   中元素的个数。证明对于任意有限集合$A,B,C\subseteq\mathbb{R}$，有

$$E(A,B\cup C)^{1/2}\le E(A,B)^{1/2}+E(A,C)^{1/2}.$$

6. $f(x)$在$[a,b]$上可导，$f(a)=0$. 存在$M>0$，使得$|f'(x)|\le M|f(x)|$。证明$f(x)$在$[a,b]$上恒等于0.