少 年 班 数 学 讲 义

陈虎民 编

2022 年 6 月 19 日

目　录

第一章　集合与关系

§ 1.1　集合的运算

☆☆ 1. 一般术语.

设 A, B 是集合.

- 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的**子集**, 或者称 A **包含于** B, 或者称 B **包含** A, 记作 $A \subseteq B$.
- 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称 A 与 B **相等**, 记作 $A = B$.
- 如果 $A = B$ 不成立, 则称 A 与 B **不相等**, 记作 $A \neq B$.
- 如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是集合 B 的**真子集**, 记作 $A \subset B$.
- 不包含任何元素的集合称为**空集**, 记作 $\varnothing$ 或 $\{\}$. 空集是任意集合的子集.
- 不是空集的集合称为**非空集合**, 或称这样的集合是**非空的**.

☆☆ 2. 集合的运算.

设 A, B 是集合.

- 把集合 $\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**并集**, 记为 $A \cup B$.
- 把集合 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**交集**, 记为 $A \cap B$.
- 把集合 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为 A 与 B 的**差集**, 记为 $A \setminus B$.

☆☆ 3. 全集和补集.

集合 U 的所有子集所构成的集合称为 U 的**幂集**, 记作 $\mathscr{P}(U)$ 或 2^U, 即

$$2^U=\{S\mid S\subseteq U\}.$$

例1 集合 $U=\{1,2,3\}$ 的幂集为

$$2^U=\{\{\},\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$ □

因 $\varnothing, U\subseteq U$, 故 $\varnothing, U\in 2^U$, 所以幂集总是非空的.

通常情况下, 我们所考虑的集合 A, B, $\cdots$ 等等, 都是某个确定的更大的集合 U 的子集, 此时把 U 就叫做**全集**.

如果 A 是全集 U 的一个子集, 就把 $U\setminus A$ 称为 A 在 U 中的**补集** (或**余集**), 记作 $\mathscr{C}_U(A)$, 或简单写成 A^c.

如不加说明, 本节所讨论的集合的交、并、余、差等运算, 都是在某个全集 U 之内的运算.

例2 证明: $A\setminus B=A\cap B^c$.

证明. 要证明集合 $A\setminus B=A\cap B^c$, 就是要证 $A\setminus B\subseteq A\cap B^c$ 且 $A\cap B^c\subseteq A\setminus B$.

我们先来证明 $A\setminus B\subseteq A\cap B^c$, 即要证对任意的 $x\in A\setminus B$ 都有 $x\in A\cap B^c$.

事实上, 对任意的 $x\in A\setminus B$, 由差集的定义知 $x\in A$ 且 $x\notin B$. 因 $x\notin B$ 故 $x\in B^c$. 所以 $x\in A$ 且 $x\in B^c$. 由交集的定义, 就有 $x\in A\cap B^c$. 再由子集的定义, 知 $A\setminus B\subseteq A\cap B^c$.

类似的办法可以证明 $A\cap B^c\subseteq A\setminus B$.

最后, 由集合相等的定义, 就得到 $A\setminus B=A\cap B^c$. □

⋆⋆ 4. 集合的运算律.

下面的定理列出 “交”, “并”, “余” 的一些重要的运算规律.

定理1 设 A,B,C 是全集 U 的子集, 则有

(1) 结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(2) 交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(3) 吸收律: $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$;

(4) 分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(5) 互补律: $A\cup A^c=U$, $A\cap A^c=\varnothing$;

(6) 幂等律: $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

(7) 有界律: $A\cup\varnothing=A$, $A\cup U=U$, $A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cap U=A$;

(8) 0-1 互补律: $\varnothing^c=U$, $U^c=\varnothing$;

(9) De Morgan 律: $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$;

(10) 对合律: $(A^c)^c=A$.

证明. 不证显然的 (1) (2) (3) (4) (5). 下面用前 5 条性质证明其余的性质.

(6) 幂等律. 由吸收律知

$$A\cap(A\cup A)=A,\quad A\cup(A\cap(A\cup A))=A;$$

因此

$$A\cup A=A\cup(A\cap(A\cup A))=A.$$

同理,

$$A\cap A=A\cap(A\cup(A\cap A))=A.$$

(7) 有界律. 由互补律知, $A\cap A^c=\varnothing$; 由吸收律知,

$$A\cup\varnothing=A\cup(A\cap A^c)=A.$$

同理有

$$A\cup U=A\cup(A\cup A^c)=(A\cup A)\cup A^c=A\cup A^c=U,$$

这里依次利用了互补律, 结合律, 幂等律, 互补律. 剩下的两个等式是类似的.

(8) 0-1 互补律. 依次利用吸收律, 交换律, 互补律, 交换律, 互补律, 有

$$\varnothing^c=\varnothing^c\cup(\varnothing^c\cap\varnothing)=\varnothing^c\cup(\varnothing\cap\varnothing^c)=\varnothing^c\cup\varnothing=\varnothing\cup\varnothing^c=U.$$

第二个等式是类似的.

(9) De Morgan律. 记 $S=A\cup B$, $T=A^c\cap B^c$, 则

$$\begin{aligned}S\cup T&=(A\cup B)\cup(A^c\cap B^c)\\&=((A\cup B)\cup A^c)\cap((A\cup B)\cup B^c)=U\cap U=U,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S \cap T &= (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) \\
&= (A \cap (A^c \cap B^c)) \cup (B \cap (A^c \cap B^c)) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing,
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
S^c = S^c \cup \varnothing = S^c \cup (S \cap T) &= (S^c \cup S) \cap (S^c \cup T) \\
&= U \cap (S^c \cup T) = (S \cup T) \cap (S^c \cup T) \\
&= (S \cap S^c) \cup T = T,
\end{aligned}
$$

即 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. 第二个等式是类似的.

(10) 对合律. 由互补律知 $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \varnothing$. 把这两个等式中的集合 A 换成集合 A^c 就有

$$A^c \cup (A^c)^c = U, \quad A^c \cap (A^c)^c = \varnothing.$$

故

$$
\begin{aligned}
(A^c)^c &= (A^c)^c \cup (A^c \cap A) \\
&= ((A^c)^c \cup A^c) \cap ((A^c)^c \cup A) \\
&= (A^c \cup A) \cap ((A^c)^c \cup A) \\
&= (A^c \cap (A^c)^c) \cup A = A.
\end{aligned}
$$

□

⋆⋆ 5. 扩展: 集合族的交和并.

设 S_λ $(\lambda \in \Lambda)$ 都是集合 (其中 Λ 是任一指标集, Λ 可以是有限集, 也可以是无穷集).

- 集合 $\{x \mid 存在某个\ \lambda \in \Lambda\ 使得\ x \in S_\lambda\}$ 称为 S_λ $(\lambda \in A)$ 的**并集**, 记为 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$.
- 集合 $\{x \mid 对任意的\ \lambda \in \Lambda\ 都有\ x \in S_\lambda\}$ 称为 S_λ $(\lambda \in A)$ 的**交集**, 记为 $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$.

例 3 集合 A, B, C 的交可以简单地写成 $A \cap B \cap C$, 它等于 $(A \cap B) \cap C$, 因此可以看作多次使用的交运算得到的. □

例 4 考虑所有的形如 $\left(1 - \dfrac{1}{n}, 2 + \dfrac{1}{n}\right)$ 的开区间 (其中 n 是正整数), 它们的交就是

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right) = \left\{x \;\middle|\; 对任意的正整数\ n\ 都有\ x \in \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= [1, 2],$$

它们的并就是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\Big) = \Big\{x \;\Big|\; \text{存在某个正整数 } n \text{ 使得 } x \in \Big(1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\Big)\Big\}$$
$$= (0, 3). \qquad \square$$

定理2 设 A, S_λ $(\lambda \in \Lambda)$ 都是集合 (其中 Λ 是任一指标集), 则有

(1) 分配律: $A \cap \Big(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\Big) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A \cap S_\lambda)$, $A \cup \Big(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\Big) = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(A \cup S_\lambda)$.

(2) De Morgan律: $\Big(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\Big)^c = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}({S_\lambda}^c)$, $\Big(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\Big)^c = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}({S_\lambda}^c)$. $\square$

§ 1.2 关系

定义1 (**有序对**) 设 A, B 是集合. 若 $a \in A$, $b \in B$, 则称集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 为元素 a 与 b 构成的**有序对**, 记之为 (a, b).

例1 由定义知 $(1, 2) = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$, $(2, 1) = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$, 因此 $(1, 2) \neq (2, 1)$.

$(1, 1) = \{\{1\}, \{1, 1\}\} = \{\{1\}, \{1\}\} = \{\{1\}\}$. $\square$

定理1 $(a, b) = (c, d)$ 的充要条件是: $a = c$ 且 $b = d$.

证明. (充分性) 如果 $a = c$ 且 $b = d$, 那么, $\{a\} = \{c\}$, $\{a, b\} = \{c, d\}$, 因此有 $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, 即 $(a, b) = (c, d)$.

(必要性) 设 $(a, b) = (c, d)$, 即 $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. 故

$$\{a\} = \{a\} \cap \{a, b\} = \{c\} \cap \{c, d\} = \{c\},$$

所以 $a = c$. 因此 $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$, 于是又有

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a\} \cup \{a, d\} = \{a, d\}.$$

下面分两种情况讨论:

(i) 若 $a = b$, 则由 $d \in \{a, d\}$ 以及 $\{a, d\} = \{a, b\} = \{b, b\} = \{b\}$, 知 $b = d$.

(ii) 若 $a \neq b$, 则由 $b \in \{a, b\}$ 及 $\{a, b\} = \{a, d\}$ 得 $b \in \{a, d\}$, 因此也有 $b = d$. $\square$

问题1 应如何定义 "有序 n-元组" $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 使得

$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \iff$ 对每个 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 都有 $a_k = b_k$?

定义 2 (**直积, Cartesian 积**) 设 X, Y 是集合, 称集合 $\{(x,y) \mid x \in X \text{ 且 } y \in Y\}$ 为 X 与 Y 的**直积**, 记为 $X \times Y$.

例 2 设 $X = \{A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}$, $Y = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$, 则它们的直积为

$$\begin{aligned} X \times Y =\{&(A,\clubsuit),(K,\clubsuit),(Q,\clubsuit),(J,\clubsuit),(10,\clubsuit),\cdots,(3,\clubsuit),(2,\clubsuit),\\ &(A,\diamondsuit),(K,\diamondsuit),(Q,\diamondsuit),(J,\diamondsuit),(10,\diamondsuit),\cdots,(3,\diamondsuit),(2,\diamondsuit),\\ &(A,\heartsuit),(K,\heartsuit),(Q,\heartsuit),(J,\heartsuit),(10,\heartsuit),\cdots,(3,\heartsuit),(2,\heartsuit),\\ &(A,\spadesuit),(K,\spadesuit),(Q,\spadesuit),(J,\spadesuit),(10,\spadesuit),\cdots,(3,\spadesuit),(2,\spadesuit)\}. \end{aligned}$$ □

直积是 X 中的元素与 Y 中的元素构成的有序对的全体所构成的集合.

一般地, 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是集合, 它们的直积被定义为

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

定义 3 (**二元关系**) 设 X, Y 是非空集合, 若 R 是 $X \times Y$ 的一个子集, 我们就称 R 是一个从 X 到 Y 的**二元关系**.

设 $x \in X$, $y \in Y$, 如果 $(x,y) \in R$, 则称 x 与 y 有关系 R, 记为 xRy.

特别地, 从 X 到 X 的二元关系关系称为 X 上的二元关系.

例 3 若 $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + 4y^2 \le 1\}$, 则 R 是一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的二元关系. □

例 4 若 $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \text{存在整数 } k \text{ 使得 } x - y = 3k\}$, 则 R 是一个从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的二元关系, 即 R 是 $\mathbb{Z}$ 上的二元关系. □

例 5 若 $R = \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : \text{存在整数 } r \text{ 使得 } y - x = r\}$, 则 R 是一个从 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的二元关系, 即 R 是 $\mathbb{Q}$ 上的二元关系. □

定义 4 (**复合关系**) 设 R 是从 X 到 Y 的二元关系, S 是从 Y 到 Z 的二元关系, 记

$$S \circ R := \{(x,z) \in X \times Z \mid \text{存在 } y \in Y \text{ 使得 } (x,y) \in R \text{ 且 } (y,z) \in S\},$$

并把从 X 到 Z 的二元关系 $S \circ R$ 称为 R 与 S 的**复合关系**.

例 6 对任意非空集合 X, 把 X 上的二元关系 $\{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}$ 称为 X 上的**恒同映射**, 记为 I_X, 即 $I_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$. 证明: 若 X, Y 都是非空集, R 是从 X 到 Y 的二元关系, 则 $R \circ I_X = R$, $I_Y \circ R = R$.

解. 对任意的 $(x,y) \in R$, 因 $(x,x) \in I_X$, 故 $(x,y) \in R \circ I_X$, 因此 $R \subseteq R \circ I_X$.

另一方面, 对任意的 $(x,y)\in R\circ I_X$, 存在 $t\in X$ 使得 $(x,t)\in I_X$, $(t,y)\in R$. 由 $(x,t)\in I_X$ 知 $x=t$, 故 $(x,y)=(t,y)\in R$, 因此又有 $R\circ I_X\subseteq R$.

综上得 $R\circ I_X=R$. 第二个式子是类似的. □

例 7 设 $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x^2+4y^2\leq 1\}$, $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x-y>1\}$, 求 $S\circ R$.

解. 根据复合关系的定义直接计算,

$$\begin{aligned}
S\circ R&=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: \text{存在 } t \text{ 使得 } (x,t)\in R \text{ 且 } (t,y)\in S\}\\
&=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: \text{存在 } t \text{ 使得 } x^2+4t^2\leq 1 \text{ 且 } t-y>1\}\\
&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: \text{存在 } t \text{ 使得 } -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\leq t\leq\frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \text{ 且 } t>y+1\right\}\\
&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: \text{存在 } t \text{ 使得 } t\in\left[-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2},\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\right]\cap(y+1,+\infty)\right\}\\
&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: \left[-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2},\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\right]\cap(y+1,+\infty)\neq\varnothing\right\}\\
&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\in(y+1,+\infty)\right\}\\
&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: \sqrt{1-x^2}>2y+2\right\}.
\end{aligned}$$
□

定理 2 (**结合律**) *若 R 是从 X 到 Y 的二元关系, S 是从 Y 到 Z 的二元关系, T 是从 Z 到 W 的二元关系, 则 $T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$.*

证明. 因 $S\circ R$ 是从 X 到 Z 的二元关系, 故 $T\circ(S\circ R)$ 是从 X 到 W 的二元关系. 因 $T\circ S$ 是从 Y 到 W 的二元关系, 故 $(T\circ S)\circ R$ 从是 X 到 W 的二元关系. 对任意的 $(x,w)\in X\times W$, 要证明 $(x,w)\in T\circ(S\circ R)\iff(x,w)\in(T\circ S)\circ R$. 事实上,

$$\begin{aligned}
&(x,w)\in T\circ(S\circ R) \iff \text{存在 } z\in Z,\ \text{使得 } (x,z)\in S\circ R \text{ 且 } (z,w)\in T\\
\iff&\ \text{存在 } z\in Z,\ \text{存在 } y\in Y,\ \text{使得 } (x,y)\in R \text{ 且 } (y,z)\in S \text{ 且 } (z,w)\in T\\
\iff&\ \text{存在 } y\in Y,\ \text{存在 } z\in Z,\ \text{使得 } (x,y)\in R \text{ 且 } (y,z)\in S \text{ 且 } (z,w)\in T\\
\iff&\ \text{存在 } y\in Y,\ \text{使得 } (x,y)\in R \text{ 且 } (y,w)\in T\circ S\\
\iff&\ (x,w)\in(T\circ S)\circ R.
\end{aligned}$$
□

定义 5 (**逆关系**) *设 R 是从 X 到 Y 的二元关系, 记*

$$R^{-1}:=\{(y,x)\in Y\times X\mid (x,y)\in R\},$$

并把从 Y 到 X 的二元关系 R^{-1} 称为关系 R 的**逆关系**.

例 8 考虑 $\mathbb{R}$ 上的关系 $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid y\geqslant x^2\}$. S 的逆关系 S^{-1} 仍是 $\mathbb{R}$ 上的关系, 且

$$S^{-1}=\{(y,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid y\geqslant x^2\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x\geqslant y^2\}.$$ □

定理 3 若 R 是从 X 到 Y 的二元关系, 则 $(R^{-1})^{-1}=R$.

证明. 对任意的 $(x,y)\in X\times Y$, 有

$$(x,y)\in(R^{-1})^{-1}\iff(y,x)\in R^{-1}\iff(x,y)\in R.$$

所以 $(R^{-1})^{-1}=R$. □

定理 4 若 R 是从 X 到 Y 的二元关系, S 是从 Y 到 Z 的二元关系, 则有

$$(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}.$$

证明. 对任意的 $(z,x)\in Z\times X$,

$$\begin{aligned}
(z,x)\in(S\circ R)^{-1}&\iff(x,z)\in S\circ R\\
&\iff \text{存在 } y\in Y,\ \text{使得 } (x,y)\in R \text{ 且 } (y,z)\in S\\
&\iff \text{存在 } y\in Y,\ \text{使得 } (y,x)\in R^{-1} \text{ 且 } (z,y)\in S^{-1}\\
&\iff (z,x)\in R^{-1}\circ S^{-1}.
\end{aligned}$$

因此 $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$. □

定义 6 (**等价关系**) 设 R 是非空集合 X 上的一个二元关系. 如果 R 满足

(1) 反身性: 对任意的 $x\in X$ 都有 xRx;

(2) 对称性: 对任意的 $x,y\in X$, 若 xRy, 则 yRx;

(3) 传递性: 对任意的 $x,y,z\in X$, 若 xRy 且 yRz, 则 xRz;

那么, 就称 R 是 X 上的一个**等价关系**.

对于给定的等价关系 R, 若 xRy, 则称 x 与 y **等价**, 记作 $x\sim y$.

例 9 对任意非空集合 X, $I_X=\{(x,x)\mid x\in X\}$ 是 X 上的一个等价关系. $X\times X$ 也是 X 上的一个等价关系. 从集合的包含关系看, I_X 是 X 上最小的等价关系, $X\times X$ 是 X 上最大的等价关系. □

例 10 $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x-y\in\mathbb{Z}\}$, $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x-y\in\mathbb{Q}\}$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的等价关系. 但 $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x-y\in\mathbb{N}\}$ 则不是 $\mathbb{R}$ 上的等价关系, 因为它不是对称的.

设 $m\in\mathbb{N}^+$, 则 $\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid$ 存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得 $x-y=km\}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系. 在这个等价关系下, 称相互等价的元素 x,y 是模 m **同余**的, 记为 $x\equiv y \pmod m$. □

定义 7 设 R 是 X 上的等价关系. 对任意的 $x\in X$, 称 $[x]_R:=\{y\in X\,|\,yRx\}$ 为 R 的一个**等价类**. 集合 $X/R:=\{[x]_R\,|\,x\in X\}$ 称为 X 关于 R 的**商集**.

定理 5 若 R 是非空集 X 上的等价关系, 则 R 每个等价类都是非空的, 不相等的等价类是互不相交的, 并且 $X=\bigcup\limits_{x\in X}[x]_R$. □

§ 1.3 映射

定义 1 (**映射**, **函数**) 设 X 是非空集, R 是从 X 到 Y 的二元关系. 如果 R 满足下列条件:

(1) R 是**右唯一的**: 若 xRy_1 且 xRy_2, 则 $y_1=y_2$;

(2) R 是**左满的**: 对任意的 $x\in X$, 存在 $y\in Y$, 使得 xRy.

则称 R 是一个从 X 到 Y 的**映射**或**函数**, 记作 $R:X\to Y$.

对于给定的映射 $R:X\to Y$, 如下的相关概念是有用的.

- 对于任意的 $x\in X$, $y\in Y$, 若 xRy, 则称 y 是 x 在映射 R 下的**像**, 或称 y 是函数 R 在 x 处的**函数值**, 并记做 $R:x\mapsto y$, 或是 $y=R(x)$.
- 把集合 X 称为映射 R 的**定义域**, 把 Y 称为映射 R 的**陪域**.
- 把 Y 的子集
$$R(X):=\{y\mid \text{存在 } x\in X \text{ 使得 } y=R(x)\}$$
称为映射 R 的**值域**.
- 若 $A\subseteq X$, 则把 Y 的子集
$$R(A):=\{y\mid \text{存在 } x\in A \text{ 使得 } y=R(x)\}$$
称为 A 在映射 R 下的**像**.

- 若 $B \subseteq Y$, 则把 X 的子集
$$R^{-1}(B) := \{x \mid x \in A \text{ 且 } R(x) \in B\}$$
称为 B 在映射 R 下的**原像**.

- 若 $X_1 \subseteq X$, 映射 $R_1 : X_1 \to Y$ 满足: 对任意的 $x \in X_1$ 都有 $R_1(x) = R(x)$, 则称 R_1 是 R 在 X_1 上的**限制**, 称 R 是 R_1 的一个**延拓**, 记作 $R_1 = R\big|_{X_1}$.

定理 1 (**复合映射**) 设 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, 则 $g \circ f : X \to Z$.

证明. 因 $f : X \to Y$ 是映射, 故对任意的 $x \in X$, 存在 $y \in Y$ 使得 xfy.

因 $g : Y \to Z$ 也是映射, 故存在 $z \in Z$ 使得 yfz.

由复合关系的定义知有 $x(g \circ f)z$. 因此 $g \circ f$ 是左满的.

对任意的 $x \in X$, $z_1, z_2 \in Z$, 若 $x(g \circ f)z_1$ 且 $x(g \circ f)z_2$, 则存在 $y_1 \in Y$ 使得 xfy_1 且 y_1gz_1, 也存在 $y_2 \in Y$ 使得 xfy_2 且 y_2gz_2.

由 f 是右唯一的知 $y_1 = y_2$, 故 y_1gz_1, y_1gz_2. 再由 g 是右唯一的知 $z_1 = z_2$. 因此 $g \circ f$ 是右唯一的. 所以 $g \circ f$ 是映射. □

注. 我们把映射 $g \circ f : X \to Z$ 称为映射 f 与 g 的**复合映射**.

例 1 设 $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, 则从 X 到 Y 的二元关系
$$f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ y = x^2\}$$
是一个从 X 到 Y 的映射, 通常记为
$$f : X \to Y,\ x \mapsto x^2, \quad \text{或} \quad f(x) = x^2\ (x \in \mathbb{R}).$$
这里 f 的定义域和陪域都是 $\mathbb{R}$, 值域为 $f(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geqslant 0\}$.

若设 $Z = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geqslant 0\}$, 则从 X 到 Z 的二元关系
$$g = \{(x, z) \mid x \in \mathbb{R},\ z \in Z,\ z = x^2\}$$
是一个从 X 到 Z 的映射, 即 $g : X \to Z$, $x \mapsto x^2$, 其值域是 $g(\mathbb{R}) = Z$. □

注意到 f 和 g 的定义域是相同的, 而且对于任意的 $x \in X$, $f(x) = g(x)$. 通常我们会认为这两个函数是相同的. 事实上, 如果我们仅仅考虑 f 和 g 作为二元关系, 这两个有序对集合 (在平面的坐标系里看, 就相当于函数的图像) 是完全相同的.

定义2 (**单射**, **满射**, **双射**) 设 $f: X \to Y$.

(1) 若对满足 $f(x_1) = f(x_2)$ 的 $x_1, x_2 \in X$ 都有 $x_1 = x_2$, 则称 f 是**单射**.

(2) 若对任意的 $y \in Y$ 都存在 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$, 称 f 是**满射**

(3) 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 是**双射**.

例2 继续考虑例1. 根据上述定义, f 和 g 都不是单射, 因而必然不是双射. f 不是满射, 但 g 是满射. 一般地, 对于任意映射 $f: X \to Y$, 在函数的图像相同的意义下, 总是可以把它看成是从 X 到 $f(X)$ 的满射. 进而, 若映射 $f: X \to Y$ 是单射, 则可在上述意义下, 把它看成是从 X 到 $f(X)$ 的双射. □

例3 (**恒同映射**) 设 X 是非空集, 上节中是把**恒同映射** $I_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ 作为二元关系来讨论的. 事实上 I_X 也是映射, 即 $I_X: X \to X, x \mapsto x$, 或 $I_X(x) = x\ (x \in X)$. 它不仅是双射, 并且对任意映射 $f: X \to Y$ 都有 $f \circ I_X = f$, $I_Y \circ f = f$. □

定理2 映射 $f: X \to Y$ 的逆关系 $f^{-1}: Y \to X$ 也是映射的充要条件是 f 是双射.

证明. 二元关系 $f^{-1}: Y \to X$ 是右唯一的

$\iff$ 对任意的 $y \in Y$, $x_1, x_2 \in X$, 若 $yf^{-1}x_1$ 且 $yf^{-1}x_2$, 则 $x_1 = x_2$

$\iff$ 对任意的 $y \in Y$, $x_1, x_2 \in X$, 若 x_1fy 且 x_2fy, 则 $x_1 = x_2$

$\iff$ f 是单射.

二元关系 $f^{-1}: Y \to X$ 是左满的

$\iff$ 对任意的 $y \in Y$, 存在 $x \in X$, 使得 $yf^{-1}x$

$\iff$ 对任意的 $y \in Y$, 存在 $x \in X$, 使得 xfy

$\iff$ f 是满射. □

注. 若映射 $f: X \to Y$ 逆关系 $f^{-1}: Y \to X$ 也是映射, 则把 f^{-1} 为 f 的**逆映射**.

定理3 设 $f: X \to Y$ 是双射, 则它的逆映射 f^{-1} 也是双射. 并且有

$$(f^{-1})^{-1} = f, \quad f^{-1} \circ f = I_X, \quad f \circ f^{-1} = I_Y.$$

证明. 由 f 是映射知 f 是右唯一的, 故 f^{-1} 是单射. 又因 f 是左满的, 故 f^{-1} 是满射. 所以 f^{-1} 是双射. 并且, 由上节中定理3可知 $(f^{-1})^{-1} = f$.

下面证明 $f^{-1} \circ f = I_X$. 一方面, 对任意的 $(x_1, x_2) \in X \times X$,

$$\begin{aligned}(x_1,x_2)\in f^{-1}\circ f &\iff \text{存在 } y\in Y \text{ 使得 } (x_1,y)\in f \text{ 且 } (y,x_2)\in f^{-1}\\ &\iff \text{存在 } y\in Y \text{ 使得 } (x_1,y)\in f \text{ 且 } (x_2,y)\in f\\ &\iff \text{存在 } y\in Y \text{ 使得 } y=f(x_1) \text{ 且 } y=f(x_2).\end{aligned}$$

因f 是单射, 故 $x_1=x_2$, 因此 $(x_1,x_2)\in I_X$. 这说明 $f^{-1}\circ f\subseteq I_X$.

另一方面, 对任意的 $(x,x)\in I_X$, 因 f 是映射, 故存在 $y\in Y$ 使得 $(x,y)\in f$, 那么也有 $(y,x)\in f^{-1}$. 因此 $(x,x)\in f^{-1}\circ f$. 这说明 $I_X\subseteq f^{-1}\circ f$.

综上知 $f^{-1}\circ f=I_X$. 前面的论证说明, 对任意双射 $g:Y\to X$ 都有 $g^{-1}\circ g=I_Y$. 现在 $f^{-1}:Y\to X$ 是双射且 $(f^{-1})^{-1}=f$, 故 $f\circ f^{-1}=(f^{-1})^{-1}\circ f^{-1}=I_Y$. □

定理4 对任意映射 $f:X\to Y$,

(1) f 是单射 $\iff$ 存在映射 $g:Y\to X$ 使得 $g\circ f=I_X$. (称 g 为 f 的**左逆**)

(2) f 是满射 $\iff$ 存在映射 $h:Y\to X$ 使得 $f\circ h=I_Y$. (称 h 为 f 的**右逆**)

(3) f 是双射 $\iff$ 存在映射 $g,h:Y\to X$ 使得 $g\circ f=I_X$, $f\circ h=I_Y$.

(4) f 是双射 $\iff$ 存在映射 $g:Y\to X$ 使得 $g\circ f=I_X$, $f\circ g=I_Y$.

这个定理的证明可由如下的四个引理得到.

引理5 若 $f:X\to Y$ 是单射, 则 f 有左逆.

证明. 设 $h:X\to f(X)$, $x\to f(x)$, 则 h 为满射. 因是 f 单射, 故 h 也是单射. 因此 h 为双射, 所以 h 有逆映射 $h^{-1}:f(X)\to X$.

因 X 为非空集, 故可取定 $a\in X$. 令 $g=h^{-1}\cup((Y\setminus f(X))\times\{a\})$, 即

$$g=h^{-1}\cup\{(t,a):t\in Y\setminus f(X)\}.$$

则 g 是从 Y 到 X 的映射. 对任意的 $x\in X$, 因 $f(x)\in f(X)$, 故

$$g(f(x))=h^{-1}(f(x))=h^{-1}(h(x))=x.$$

所以 $g\circ f=I_X$. □

引理6 若 $f:X\to Y$ 是满射, 则 f 有右逆. (严重超纲故不证)

引理7 设 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$. 若复合映射 $g\circ f$ 是单射, 则 f 是单射; 若复合映射 $g\circ f$ 是满射, 则 g 是满射.

证明. (1) 设 $g\circ f$ 是单射. 若 $x_1,x_2\in X$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$,

即 $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$. 由 $g\circ f$ 是单射知 $x_1=x_2$. 所以 f 是单射.

(2) 设 $g\circ f$ 是满射, 则对任意的 $z\in Z$, 存在 $x\in X$ 使得 $g(f(x))=z$. 因 $f(x)\in Y$, 故存在 $y\in Y$ 使得 $g(y)=z$. 所以 g 是满射. □

引理8 设 $f:X\to Y$, $g,h:Y\to X$. 若 $g\circ f=I_X$, $f\circ h=I_Y$, 则 $g=h$.

证明. 因 $g\circ f=I_X$, $f\circ h=I_Y$, 且映射的复合作为二元关系的复合是满足结合律的, 故有

$$g=g\circ I_Y=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=I_X\circ h=h.$$ □

定理9 设 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$, 若 $g\circ f=I_X$, $f\circ g=I_Y$. 则 f, g 都是双射, 且互为逆映射. □

例4 设 $f:X\to Y$. 定义 $V=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in X, f(x_1)=f(x_2)\}$, 则 V 是集合 X 上的等价关系. 在这个等价关系下, $x_1\sim x_2$ 的充要条件是 $f(x_1)=f(x_2)$. □

§ 1.4 计数

例1 集 $A=\{2k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{N}$ 的真子集, 且 $f:\mathbb{N}\to A$, $k\mapsto 2k$ 是一个双射. □

然而并不是每个非空集合都有到它自己的某个真子集的双射.

设 S 是一个非空集合. 如果存在正整数 n, 以及双射 $f:\{1,2,\cdots,n\}\to S$, 就称 S 是一个**有限集**. 并记 $|S|=n$. 我们约定 $\varnothing$ 也叫有限集, 并记 $|\varnothing|=0$.

命题1 设 A,B 都是有限集.

(1) 若存在单射 $f:A\to B$, 则 $|A|\le|B|$.

(2) 若存在满射 $f:A\to B$, 则 $|A|\ge|B|$.

(3) 若存在双射 $f:A\to B$, 则 $|A|=|B|$. □

例2 设非空集 S_1, S_2 都是有限集, 则 $|S_1\times S_2|=|S_1|\cdot|S_2|$.

证明. 记 $|S_1|=n$, $S_1=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

对任意的 $x_j\in S_1$, 考虑集合 $P_j=\{(x_j,y)\,|\,y\in S_2\}$. 因映射 $f_j:S_2\to P_j$, $y\mapsto(x_j,y)$ 是双射, 故 $|P_j|=|S_2|$.

因 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是两两不交的非空集, 且 $\bigcup\limits_{j=1}^{n} P_j = S_1 \times S_2$, 由加法原理得

$$|S_1 \times S_2| = |P_1| + |P_2| + \cdots + |P_n| = n|S_2| = |S_1| \times |S_2|. \qquad \square$$

定义 1 对全集 X 的任意子集 S, 定义函数 $\chi_S : X \to \{0,1\}$ 为

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S; \\ 0, & x \notin S. \end{cases}$$

称 χ_S 为 S 的**指示函数** (或**特征函数**).

性质 2 设 X 是全集, $A, B \subseteq X$.

(1) 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $\chi_A \cdot \chi_B = 0$;

(2) 若 $B = A^c$, 则$\chi_A + \chi_B = 1$;

(3) $\chi_{A\cap B} = \min(\chi_A, \chi_B) = \chi_A \cdot \chi_B$;

(4) $\chi_{A\cup B} = \max(\chi_A, \chi_B) = 1 - (1-\chi_A)\cdot(1-\chi_B)$;

(5) $\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$.

♣ **记号**. 对非空集 X, Y, 记 $Y^X = \{f \mid f : X \to Y\}$.

若非空集 X, Y 都是有限集, 则由乘法原理立知 $|Y^X| = |Y|^{|X|}$.

性质 3 若 X 是非空集, 则存在双射 $\varphi : \mathscr{P}(X) \to \{0,1\}^X$.

证明. 对任意的 $S \subseteq X$, 显然有 $\chi_S \in \{0,1\}^X$. 令 $\varphi : \mathscr{P}(X) \to \{0,1\}^X$, $S \to \chi_S$.

对任意的 $f \in \{0,1\}^X$, 令 $S = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$, 则 $f = \chi_S$, 即 $f = \varphi(S)$. 因此 φ 是满射. 又易见 φ 是单射, 所以 φ 是双射. $\square$

推论 4 若 X 是有限集, 则 $|\mathscr{P}(X)| = 2^{|X|}$.

例 3 从集合 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ 中取出子集对 (A, B) 使得 $A \subseteq B$, 有多少种方法?

解. 设 $U = \{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq S\}$, $V = \{f \mid f : S \to \{0, 1, 2\}\}$, 则 $|V| = 3^n$.

对任意的 $(A, B) \in U$, 定义 $g_{(A,B)} : S \to \{0, 1, 2\}$ 为

$$g_{(A,B)}(S) = \begin{cases} 0, & 当\ x \notin B \\ 1, & 当\ x \in B \setminus A \\ 2, & 当\ x \in A, \end{cases}$$

则 $g_{(A,B)} \in V$. 再定义 $\varphi : U \to V$, $\varphi(A, B) = g_{(A,B)}$, 则 φ 是双射.

所以, $|U| = |V| = 3^n$. $\square$

定理 5 (**容斥原理**) 若 A, B 是有限集, 则

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

一般地, 若 S_1, S_2, $\cdots$, S_n 都是有限集, 则

$$\Big|\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}S_i\Big|=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2\cdots<i_k\leqslant n}\Big|\bigcap_{1\leqslant s\leqslant k}S_{i_s}\Big|$$

证明. 设 S_1, S_2, $\cdots$, S_n 都是有限集 X 的子集, 记 $B=(S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n)^c$, 则

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\chi_{S_i})=\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\chi_{S_i{}^c}=\chi_{S_1{}^c\cap S_2{}^c\cap\cdots\cap S_n{}^c}=\chi_B=1-\chi_{S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n},$$

故

$$\begin{aligned}\chi_{S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n}&=1-\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\chi_{S_i})\\&=1-\Big(1+\sum_{S\subseteq\{1,2,\cdots,n\},S\neq\varnothing}(-1)^{|S|}\prod_{i\in S}\chi_{S_i}\Big)\\&=1-\Big(1+\sum_{S\subseteq\{1,2,\cdots,n\},S\neq\varnothing}(-1)^{|S|}\chi_{\bigcap\limits_{i\in S}S_i}\Big)\\&=\sum_{S\subseteq\{1,2,\cdots,n\},S\neq\varnothing}(-1)^{|S|-1}\chi_{\bigcap\limits_{i\in S}S_i}.\end{aligned}$$

因对任意的 $S\subseteq X$, 都有 $|S|=\sum\limits_{x\in X}\chi_S(x)$, 故将上面的等式两边对 $x\in X$ 求和即得

$$\Big|\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}S_i\Big|=\sum_{S\subseteq\{1,2,\cdots,n\},S\neq\varnothing}(-1)^{|S|-1}\Big|\bigcap_{i\in S}S_i\Big|.$$ □

例 4 从集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 中取出子集对 (A,B), 使 A 不是 B 的子集, 且 B 不是 A 的子集, 问共有几种不同的取法?

解. 设 $X=\{(A,B)\mid A,B\subseteq S\}$, 由乘法原理知 $|X|=|2^S\times 2^S|=2^n\cdot 2^n$.

又设 $U=\{(A,B)\mid A\subseteq B\subseteq S\}$, $V=\{(A,B)\mid B\subseteq A\subseteq S\}$.

根据例 3 的结论, 有 $|U|=|V|=3^n$, 并且

$$|U\cap V|=|\{(A,B)\mid A=B\subseteq S\}|=|\{A\mid A\subseteq S\}|=|2^S|=2^n.$$

最后由容斥原理得

$$\begin{aligned}|U^c\cap V^c|=|(U\cup V)^c|&=|X|-|U\cup V|\\&=|X|-(|U|+|V|-|U\cap V|)\\&=2^n\cdot 2^n-2\cdot 3^n+2^n.\end{aligned}$$ □

⋆⋆ 排列

以下总设 $M=\{1,2,\cdots,m\}$, 非空集 S 是有限集, $|S|=n$.

定义 2 (**无重复排列**) 若 $f: M\to S$ 是单射, 则称 f 是从 S 中取出 m 个元素的一个 (无重复) **排列**. 特别地, 当 $m=n$ 时, 称 f 是 S 中的元素的一个**全排列**.

若记 $F=\{f \mid f: M\to S\text{是单射}\}$, 则把 $|F|$ 称为从 S 中取出 m 个元素的**排列数**. 特别地, 当 $m=n$ 时, 就把 $|F|$ 称为 S 中的元素的**全排列数**.

排列 f 可表示为 $f(1),f(2),\cdots,f(m)$, 或者 $(f(1),f(2),\cdots,f(m))$.

定理 6 从 n 个元素的集合 S 中取出 m 个元素的可重复排列数为

$$P(n,m)=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+2)\cdot(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

特别地, n 个元素的集合 S 中的元素的全排列数为 $n!$.

定义 3 (**可重复排列**) 称映射 $f: M\to S$ 是从 S 中取出 m 个元素的**可重复排列**.

若记 $F=\{f \mid f: M\to S\}$, 则称 $|F|$ 为从 S 中取出 m 个元素的**可重复排列数**.

定理 7 从 n 个元素的集合 S 中取出 m 个元素的可重复排列数为 n^m.

问题 2 如何用映射来描述 “有序 n-元组”? 如何用映射来描述 “无穷数列”?

例 5 设 n 元集 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $M=\{1,2,\cdots,m\}$, 正整数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 满足 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}m_j=m$. 若 $F=\{f \mid f: M\to S,\ \text{对任意的 } x_i\in S,\ \text{都有 } |f^{-1}(x_i)|=m_i\}$, 求 $|F|$.

解. 设 $G=\{(x_i,k) \mid x_i\in S, k\in\mathbb{N}^*, 1\leqslant k\leqslant m_i\}$, 则 $|G|=m$.

设 $U=\{g \mid g: M\to G \text{ 是双射}\}$, 则 $|U|=m!$.

定义 U 上的关系 R 为: $gRh \iff \pi\circ g=\pi\circ h$, 其中 $\pi: G\to S$, $(x_i,k)\mapsto x_i$. 那么:

(1) R 是 U 上的等价关系, 且对任意 $g\in U$, $\pi\circ g\in F$;

(2) R 的每个等价类中恰有 $r:=m_1!m_2!\cdots m_n!$ 个元素;

(3) 映射 $\varphi: U/R\to F$, $[g]_R\mapsto\pi\circ g$ 是双射.

因此 $m!=|U|=|U/R|\cdot r=|F|\cdot r$, 所以 $|F|=\dfrac{m!}{m_1!\,m_2!\cdots m_n!}$. □

⋆⋆ 组合

以下设非空集 S 是一个有限集, $|S|=n$, $m\in\mathbb{N}$.

定义 4 (组合) 若 X 是 S 的子集且 $|X|=m$, 则称 X 是从 S 中取出 m 个元素的一个**组合** (或称 X 为 S 的一个 $\boldsymbol{m}$**-子集**).

S 的所有 m-子集的个数, 称为从 S 中取出 m 个元素的**组合数**,

定理 8 从 n 个元素的集合 S 中取出 m 个元素的组合数为

$$C(n,m)=\frac{P(n,m)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

性质 9 $C(n,m)=C(n,n-m)$, $\quad C(n+1,m+1)=C(n,m+1)+C(n,m)$.

证明. (1) 设 S 是 n 元集, $A=\{X:X\subseteq S,|S|=m\}$, $B=\{X:X\subseteq S,|S|=n-m\}$. 定义 $\varphi:A\to B$, $X\mapsto S\setminus X$, 则 φ 是双射.

(2) 设全集 S 是 $n+1$ 元集, 取定 $a\in S$. 记 $T=S\setminus\{a\}$, 则 $|T|=n$, 且

$$\{X\mid X\subset S,|X|=m+1\}=\{X\mid X\subset T,|X|=m+1\}\cup\{Y\cup\{a\}\mid Y\subset T,|Y|=m\}.$$

再注意到右边两个集合不交即可得结论. □

§ 1.5 数集

我们用 $\mathbb{N}$ 表示全体自然数 (即非负整数) 构成的集合, 称为自然数集; 用 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数构成的集合, 称为整数集; 用 $\mathbb{Q}$ 表示全体有理数构成的集合, 称为有理数集; 用 $\mathbb{R}$ 表示全体实数构成的集合, 称为实数集; 用 $\mathbb{C}$ 表示全体复数构成的集合, 称为复数集.

记 $\mathbb{N}^*=\{n\in\mathbb{Z}:n>0\}$, 称为正整数集, 或记为 $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}_+$; 记 $\mathbb{Q}^+=\{q\in\mathbb{Q}:q>0\}$, $\mathbb{R}^+=\{r\in\mathbb{R}:r>0\}$, 等等.

⋆⋆ 1. 自然数集 $\mathbb{N}$

我们在这里不给出自然数的定义, 只从叙述三个比较基本的命题之后展开讨论, 其中的命题 1 是 “Peano 公理” 之一, 命题 2 和命题 3 是 Peano 公理 (再定义加法和乘法以及大小等一系列复杂的操作之后) 的推论.

命题 1 (归纳公理) 设 $S\subseteq\mathbb{N}$, 如果

(1) $0\in S$, 且

(2) 对任意的 $k \in S$ 都有 $k+1 \in S$,

那么, $S = \mathbb{N}$.

命题 2 (离散性) 对任意 $a \in \mathbb{N}$, 不存在 $b \in \mathbb{N}$, 使 $a < b < a+1$.

命题 3 (**Archimedean 性质**) 对任意的 $a, b \in \mathbb{N}$, 若 $a > 0$, 则存在正整数 n 使得 $na > b$.

定理 4 (数学归纳法原理) 设 $P(n)$ 是一个关于自然数 n 的命题, 如果

(1) $P(0)$ 成立, 且

(2) 由 $P(n)$ 成立可推出 $P(n+1)$ 成立,

那么, 对所有的自然数 n, $P(n)$ 都成立.

证明. 考虑集合 $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ 成立}\}$. 由 (1) 知 $0 \in S$. 由 (2) 知若 $n \in S$, 则 $n+1 \in S$. 由归纳公理知 $S = \mathbb{N}$, 即对所有的自然数 n, $P(n)$ 都成立. □

例 1 设 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ 满足 $f(0) = 1$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $f(n+1) = \dfrac{1}{2} f(n)(4 - f(n))$, 证明: 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $f(n) < f(n+1) < 2$.

解. 设命题 $P(n)$ 为 "$f(n) < f(n+1) < 2$".

因 $f(0) = 1$, $f(1) = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot (4-1) = \dfrac{3}{2}$, 故 $f(0) < f(1) < 2$, 即 $P(0)$ 成立.

假设 $P(k)$ 成立, 即 $f(k) < f(k+1) < 2$, 则

$$\begin{aligned} f(k+2) - f(k+1) &= \frac{1}{2} f(k+1)(4 - f(k+1)) - f(k+1) \\ &= \frac{1}{2}\big(2 - f(k+1)\big) f(k+1) > 0. \end{aligned}$$

由 $f(k+1) < 2$, 得 $2 - f(k+1) \neq 0$, 故又有

$$\begin{aligned} f(k+2) &= \frac{1}{2} f(k+1)(4 - f(k+1)) \\ &= \frac{1}{2}\big(4 - (2 - f(k+1))^2\big) < 2. \end{aligned}$$

因此 $P(k+1)$ 成立. 由数学归纳法原理知, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $f(n) < f(n+1) < 2$. □

定理 5 (最小数原理) 若 $S \subseteq \mathbb{N}$ 且 $S \neq \varnothing$, 则 S 中有最小的元素, 即存在 $m \in S$, 使得对任意的 $s \in S$ 都有 $m \leq s$.

证明. 设 $T = \{t \in \mathbb{N} : \text{对任意的 } s \in S \text{ 都有 } t \leq s\}$. 显然 $0 \in T$.

倘若 "对任意的 $t \in T$, 都有 $t+1 \in T$", 则由归纳公理知 $T = \mathbb{N}$. 因 S 非空, 故存在

$a \in S$. 因 $a < a+1$, 由 T 的定义知 $a+1 \notin T$, 这就与 $T = \mathbb{N}$ 矛盾. 所以, 存在 $m \in T$, 使得 $m+1 \notin T$.

因 $m+1 \notin T$, 故存在 $b \in S$, 使得 $b < m+1$. 由离散性知 $b \leq m$. 而 $m \in T$, 故又有 $m \leq b$, 所以 $m = b$, 因此 $m \in S$. 最后由 $m \in T$, 知 m 是 S 中的最小数. □

推论 6 (**最大数原理**) 若 $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \varnothing$, 且存在 $\beta \in \mathbb{N}$ 使得对任意的 $s \in S$ 都有 $s \leq \beta$, 则 S 中有最大的元素, 即存在 $m \in S$, 使得对任意的 $s \in S$ 都有 $s \leq m$. □

⋆⋆ 2. 整数集 $\mathbb{Z}$

性质 7 (**离散性和 Archimedean 性质**)

(1) 对任意 $a \in \mathbb{Z}$, 不存在 $b \in \mathbb{Z}$, 使 $a < b < a+1$.

(2) 对任意的 $a, b \in \mathbb{Z}$, 若 $a > 0$, 则存在正整数 n 使得 $n\,a > b$. □

性质 8 设 $S \subseteq \mathbb{Z}$, $S \neq \varnothing$.

(1) 若存在 $\alpha \in \mathbb{Z}$ 使得对任意的 $s \in S$ 都有 $s \geq \alpha$, 则 S 中有最小的元素;

(2) 若存在 $\beta \in \mathbb{Z}$ 使得对任意的 $s \in S$ 都有 $s \leq \beta$, 则 S 中有最大的元素. □

问题 3 是否存在双射 $\mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$?

⋆⋆ 3. 有理数集 $\mathbb{Q}$

性质 9 (**Archimedean 性质**) 对任意的 $a, b \in \mathbb{Q}$, 若 $a > 0$, 则存在正整数 n 使得 $n\,a > b$. □

定理 10 (**稠密性**) 对任意的 $a, b \in \mathbb{Q}$, 若 $a < b$, 则存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $a < r < b$. □

例 2 设 $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 > 2\}$. 证明 A 中没有最大的数, B 中没有最小的数.

解. 对正有理数 p, 记 $q = p - \dfrac{p^2-2}{p-2}$, 则 $q = \dfrac{2+2p}{2+p} > 0$, 且 $q^2 - 2 = \dfrac{2(p^2-2)}{(p+2)^2}$.

所以当 $p \in A$ 时也有 $q \in A$, 并且 $q > p$, 这说明 A 中没有最大的数.

当 $p \in B$ 时就有 $q \in B$, 并且 $q < p$, 这说明 B 中没有最小的数. □

问题 4 上面的 q 是如何找到的? 证明不存在正有理数 x 使得 $x^2 = 2$.

问题5 是否存在双射 $\mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$？

⋆⋆ 4. 实数集 $\mathbb{R}$

性质11 (Archimedean **性质**) 对任意的 $a, b \in \mathbb{R}$, 若 $a > 0$, 则存在正整数 n 使得 $n\,a > b$. (不证)

推论12 对任意实数 x, 必存在正整数 n, 使得 $-n < x < n$. □

推论13 对任意实数 x, 必存在不超过 x 的最大整数, 也存在不小于 x 的最小整数.

注. 通常把不超过 x 的最大整数记为 $\lfloor x \rfloor$ 或 $[x]$, 把不小于 x 的最小整数记为 $\lceil x \rceil$.

定理14 ($\mathbb{Q}$ **在** $\mathbb{R}$ **中的稠密性**) 对任意的 $a, b \in \mathbb{R}$, 若 $a < b$, 则存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $a < r < b$.

证明. 由 $\mathbb{R}$ 的 Archimedean 性质知, 存在正整数 k 使得 $k > -a$, 因此 $k + a > 0$.

因 $a < b$, 故 $b - a > 0$. 由 $\mathbb{R}$ 的 Archimedean 性质知, 存在正整数 n 使得

$$n(b - a) > 1.$$

考虑 $S = \{x \in \mathbb{N} : x > n(k + a)\}$. 由 Archimedean 性质知存在正整数 l 使得 $l > n(k + a)$, 故 S 不空. 由最小数原理知 S 中有最小元素 m.

因 $m \in S$, 故 $m > n(k + a)$.

因 m 是 S 中最小元素, 故 $m - 1 \notin S$, 即 $m - 1 \le n(k + a)$, 所以

$$m \le n(k + a) + 1 < n(k + a) + n(b - a) = n(k + b).$$

于是 $n(k + a) < m < n(k + b)$. 令 $r = \dfrac{m}{n} - k$, 则 $r \in \mathbb{Q}$, 且 $a < r < b$. □

推论15 设 x 是实数. 若对任意的正有理数 r 都有 $x < r$, 则 $x \le 0$.

问题6 我们把 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 叫无理数集, 它是由全部的无理数所构成的集合. 例如 $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 无理数集在 $\mathbb{R}$ 中也是稠密的吗?

定义1 设 $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \varnothing$.

(1) 若存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得对任意的 $x \in S$ 都有 $a \le x$, 则称 S 是**有下界的**, 或者说 S **有下界**, 称 a 是 S 的一个**下界**.

(2) 若存在 $b \in \mathbb{R}$ 使得对任意的 $x \in S$ 都有 $x \le b$, 则称 S 是**有上界的**, 或者说 S **有上界**, 称 b 是 S 的一个**上界**.

(3) 若 S 既有下界又有上界, 则称 S 是**有界的**, 或者说 S **有界**.

(4) 若 α 是 S 的一个下界, 而比 α 大的实数都不是 S 的下界, 则称 α 是 S 的**最大下界**或**下确界**, 记为 $\inf S$.

(5) 若 β 是 S 的一个上界, 而比 β 小的实数都不是 S 的上界, 则称 β 是 S 的**最小上界**或**上确界**, 记为 $\sup S$.

问题 7 问 $f(n)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}}}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ 的值域有上界吗?

定理 16 (**确界原理**, **确界存在定理**) 在 $\mathbb{R}$ 中, 有上界的非空集合必有上确界; 有下界的非空集合必有下确界. (超纲不证)

注. 这个定理所描述的是实数集的 "完备性", 它是数学中的重要定理之一.

例 3 $\sup[0,1]=1$, $\sup(0,1)=1$. $\inf\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}=0$. 对于例 2 中的 A,B, 有 $\sup A=\inf B=\sqrt{2}$. $\inf\{\sqrt[n]{n}:n\in\mathbb{Z},n\geq 2\}=1$. □

第二章　不等式

§ 2.1　Jensen 不等式

本节考虑的函数, 都是指从区间到 $\mathbb{R}$ 的映射.

引理 1 设 f 是区间 I 上的函数. 若对任意的 $x, y \in I$, 都有

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

则对任意的 $x, y \in I$, 以及任意有理数 $r \in (0,1)$, 都有

$$f((1-r)x+ry) \le (1-r)f(x)+rf(y).$$

证明. 不妨设 $x < y$. 因 r 是 $(0,1)$ 中的有理数, 故存在正整数 n, k 使得 $r = \dfrac{k}{n}$, $n \ge 2$, 且 $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$. 记 $d = \dfrac{y-x}{n}$, 对任意的 $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, 记 $u_i = x + id$.

当 $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ 时, 由 $f(u_i) = f\Big(\dfrac{u_{i-1}+u_{i+1}}{2}\Big) \le \dfrac{f(u_{i-1})+f(u_{i+1})}{2}$, 得

$$f(u_i) - f(u_{i-1}) \le f(u_{i+1}) - f(u_i).$$

因此有

$$f(u_1) - f(u_0) \le f(u_2) - f(u_1) \le \cdots \le f(u_k) - f(u_{k-1}),$$

$$f(u_{k+1}) - f(u_k) \le f(u_{k+2}) - f(u_{k+1}) \le \cdots \le f(u_n) - f(u_{n-1}).$$

由此知

$$(f(u_1) - f(u_0)) + (f(u_2) - f(u_1)) + \cdots + (f(u_k) - f(u_{k-1})) \le k(f(u_k) - f(u_{k-1})),$$

$$(n-k)(f(u_{k+1}) - f(u_k)) \le (f(u_{k+1}) - f(u_k)) + (f(u_{k+2}) - f(u_{k+1})) + \cdots + (f(u_n) - f(u_{n-1})),$$

即

$$f(u_k) - f(u_0) \le k(f(u_k) - f(u_{k-1})),$$

$$(n-k)(f(u_{k+1}) - f(u_k)) \le f(u_n) - f(u_k),$$

于是

$$\frac{f(u_k)-f(u_0)}{k} \le f(u_k)-f(u_{k-1}) \le f(u_{k+1})-f(u_k) \le \frac{f(u_n)-f(u_k)}{n-k},$$

进而有 $f(u_k) \le \Big(1-\dfrac{k}{n}\Big)f(u_0)+\dfrac{k}{n}f(u_n)$, 即 $f((1-r)x+ry) \le (1-r)f(x)+rf(y)$. □

推论 2 设 f 是区间 I 上的函数. 若对任意的 $x, y \in I$, 只要 $x \ne y$ 就有

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) < \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

则对任意的 $x, y \in I$, 以及任意有理数 $r \in (0,1)$, 只要 $x \ne y$ 就有

$$f((1-r)x+ry) < (1-r)f(x)+rf(y).$$ □

定义 1 (**凸函数**) 设 f 是区间 I 上的函数.

(1) 若对任意的 $x, y \in I$, 以及任意的 $t \in (0,1)$, 总有

$$f((1-t)x+ty) \le (1-t)f(x)+tf(y),$$

就称 f 是 I 上的**凸函数**

(2) 若对任意的 $x, y \in I$, 以及任意的 $t \in (0,1)$, 只要 $x \ne y$ 就有

$$f((1-t)x+ty) < (1-t)f(x)+tf(y),$$

就称 f 是 I 上的**严格凸函数**.

定义 2 (**函数的有界性**) 设 f 是 D 上的实值函数. 若 $E \subseteq D$, 且 $f(E)$ 是有界集, 则称 f 在 E 上**有界**. 若 f 在 D 上有界, 就称 f 是**有界函数**.

定理 3 (**三角不等式**) 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$|a+b| \le |a|+|b|,$$

当且仅当 $ab \ge 0$ (即 a, b 不异号) 时等号成立.

证明. 由 $|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \le a^2+b^2+2|ab|=(|a|+|b|)^2$, 得不等式 $|a+b| \le |a|+|b|$. 再由绝对值定义知等号成立的充要条件是 $ab \ge 0$. □

推论 4 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$\big|\,|a|-|b|\,\big| \le |a-b|,$$

当且仅当 $ab \ge 0$ (即 a, b 不异号) 时等号成立. □

引理 5 设 f 是区间 I 上的函数. 若对任意的 $x, y \in I$, 都有

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

并且 f 在 I 的某个子区间上有界, 则 f 在 I 的每个闭子区间上都是有界的.

证明. 因每个区间都包含着闭区间, 故不妨假定 f 在 $[a,b]$ 上有界, 其中 $[a,b]\subseteq I$. 因此, 存在 $M>0$, 使得对任意的 $y\in[a,b]$ 都有 $|f(y)|\le M$.

(1) 先证: 若 $c\in I$, $c<a$, 则 f 在 $[c,b]$ 上有界. 为此只需证 f 在 (c,a) 上有界.

对任意的 $u\in(c,a)$, 存在正整数 n, 使得 $n>\dfrac{u-c}{b-a}$, 即 $\dfrac{u-c}{n}<b-a$. 因此存在正整数 k, 使得 $c+k\cdot\dfrac{u-c}{n}\in(a,b)$. 由 $c+k\cdot\dfrac{u-c}{n}>a$, 得 $k>\dfrac{a-c}{u-c}\cdot n>n$.

记 $y=c+k\cdot\dfrac{u-c}{n}$, 则 $u=\Big(1-\dfrac{n}{k}\Big)c+\dfrac{n}{k}y$. 因此
$$f(u)\le\Big(1-\frac{n}{k}\Big)f(c)+\frac{n}{k}f(y)\le\Big(1-\frac{n}{k}\Big)|f(c)|+\frac{n}{k}|f(y)|\le|f(c)|+M.$$
另一方面, 又存在正整数 $m>\dfrac{2(a-u)}{b-a}$, 即 $\dfrac{a-u}{m}<\dfrac{b-a}{2}$. 因此存在正整数 l 使得 $u+l\cdot\dfrac{a-u}{m}\in\Big(\dfrac{b+a}{2},b\Big)$. 由 $u+l\cdot\dfrac{a-u}{m}>\dfrac{a+b}{2}$, 知 $\dfrac{l}{m}>1+\dfrac{b-a}{2a-2u}\ge1+\dfrac{b-a}{2a-2c}$.

记 $z=u+l\cdot\dfrac{a-u}{m}$, 则 $a=\Big(1-\dfrac{m}{l}\Big)u+\dfrac{m}{l}z$. 故
$$-M\le f(a)\le\Big(1-\frac{m}{l}\Big)f(u)+\frac{m}{l}f(z)\le\Big(1-\frac{m}{l}\Big)f(u)+\frac{m}{l}M,$$
因此 $f(u)\ge-M\cdot\dfrac{l+m}{l-m}$. 又因
$$\frac{l+m}{l-m}=1+\frac{2}{\dfrac{l}{m}-1}\le1+\frac{2}{\Big(1+\dfrac{b-a}{2a-2c}\Big)-1}=1+\frac{4(a-c)}{b-a},$$
所以 $f(u)\ge-M\Big(1+\dfrac{4(a-c)}{b-a}\Big)$. 综上, f 在 (c,a) 上有界, 因此 f 在 $[c,b]$ 上有界.

(2) 同理可证, 若 $d\in I$, $d>b$, 则 f 在 $[a,d]$ 上有界.

(3) 若 $[c,d]\subseteq I$, 取 $c_1=\min\{a,c\}$, $d_1=\max\{b,d\}$.

由 (1) 知 f 在 $[c_1,b]$ 上有界, 由 (2) 知 f 在 $[a,d_1]$ 上有界, 所以 f 在 $[c_1,d_1]$ 上有界.

最后由 $[c,d]\subseteq[c_1,d_1]$ 知 f 在 $[c,d]$ 上有界. □

引理6 设 f 是区间 I 上的函数, 且 f 在 I 的某个子区间上有界. 若对任意的 $x,y\in I$, 都有
$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\le\frac{f(x)+f(y)}{2},$$
则 f 是凸函数. 若对任意的 $x,y\in I$, 只要 $x\ne y$ 就有
$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)<\frac{f(x)+f(y)}{2},$$
则 f 是严格凸函数.

证明. 先说一个事实. 若实数 a, b 满足: 对任意的 $\varepsilon > 0$ 都有 $a \le b + \varepsilon$, 则 $a \le b$.

设 $x, y \in I, x < y, \alpha \in (0,1)$. 记 $z = (1-\alpha)x + \alpha y$, 则要证 $f(z) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$.

因 f 在 $[x,y]$ 上有界, 故存在 $M > 0$, 使得对任意的 $w \in [x,y]$ 都有 $|f(w)| \le M$.

任意给定 $\varepsilon > 0$. 取正整数 n 使得 $n > \dfrac{4M+2\varepsilon}{(1-\alpha)\varepsilon} + \dfrac{2(y-x)}{y-z} + \dfrac{2(y-x)}{z-x}$. 设 $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

对任意 $i \in \{0,1,2,\cdots,n\}$, 记 $x_i = x + \dfrac{i}{n}(y-x)$, 则存在正整数 k 使得 $z \in (x_{k-1}, x_k)$.

因 $0 < z - x_{k-1} < \dfrac{y-x}{n}$, 故存在正整数 j 使得 $x_{k-1} + j(z - x_{k-1}) \in (x_{n-1}, x_n)$.

记 $w = x_{k-1} + j(z - x_{k-1})$, 则 $z = \left(1 - \dfrac{1}{j}\right)x_{k-1} + \dfrac{1}{j}w$, 于是

$$\begin{aligned} f(z) &\le \left(1-\frac{1}{j}\right)f(x_{k-1}) + \frac{1}{j}f(w) \\ &= f(x_{k-1}) + \frac{1}{j}(f(w) - f(x_{k-1})) \le f(x_{k-1}) + \frac{2M}{j}. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} f(x_{k-1}) &= f\left(\left(1-\frac{k-1}{n}\right)x + \frac{k-1}{n}y\right) \le \left(1-\frac{k-1}{n}\right)f(x) + \frac{k-1}{n}f(y) \\ &= (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) + \left(\alpha - \frac{k-1}{n}\right)f(x) - \left(\alpha - \frac{k-1}{n}\right)f(y) \\ &\le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) + \frac{2M}{n}, \end{aligned}$$

所以

$$f(z) \le f(x_{k-1}) + \frac{2M}{j} \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) + \frac{2M}{n} + \frac{2M}{j}.$$

由 n 的定义知 $\dfrac{2M}{n} < \dfrac{2M(1-\alpha)\varepsilon}{4M+2\varepsilon} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 因

$$\begin{aligned} x + \frac{n-1}{n}(y-x) = x_{n-1} < w &= x_{k-1} + j(z - x_{k-1}) \\ &< z + j(z - x_{k-1}) = x + \alpha(y-x) + j(z - x_{k-1}) \\ &\le x + \alpha(y-x) + j \cdot \frac{y-x}{n}, \end{aligned}$$

故 $j \ge n(1-\alpha) - 1 \ge \dfrac{4M+2\varepsilon}{(1-\alpha)\varepsilon}(1-\alpha) - 1 > \dfrac{4M}{\varepsilon}$, 因此 $\dfrac{2M}{j} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

这样就证明了: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 都有 $f(z) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) + \varepsilon$.

所以 $f(z) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$.

下面证明严格凸部分. 记 $u = \dfrac{x+y}{2}$, 则 $f(u) < \dfrac{1}{2}(f(x) + f(y))$.

若 $t \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, 则 $(1-t)x + ty = (1-2t)x + (2t)u$, 故

$$f((1-t)x + ty) \le (1-2t)f(x) + 2tf(u)$$

$$
\begin{aligned}
&< (1-2t)f(x) + 2t\cdot\frac{1}{2}(f(x)+f(y)) \\
&= (1-t)f(x) + tf(y).
\end{aligned}
$$

若 $t \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, 则 $(1-t)x + ty = 2(1-t)u + (1-2(1-t))y$, 故

$$
\begin{aligned}
f((1-t)x+ty) &\le 2(1-t)f(u) + (1-2(1-t))f(y) \\
&< 2(1-t)\cdot\frac{1}{2}(f(x)+f(y)) + (1-2(1-t))f(y) \\
&= (1-t)f(x) + tf(y).
\end{aligned}
$$

□

定理7 (**Jensen 不等式**) 若 f 是区间 I 上的凸函数, 则对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$, 以及任意的 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in (0,1)$, 只要 $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$, 就有

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \le t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n).$$

若 f 还是严格凸的, 则上面不等式中两边相等的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

证明. 当 $n=1$, $n=2$ 时, 不等式显然是成立的. 假设不等式对某 n $(n \ge 2)$ 成立. 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1} \in I$, $t_1, t_2, \cdots, t_n, t_{n+1} \in (0,1)$, 且 $t_1 + t_2 + \cdots + t_n + t_{n+1} = 1$. 则

$$
\begin{aligned}
f\Big(\sum_{k=1}^{n+1} t_kx_k\Big) &= f\Big((1-t_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k}{1-t_{n+1}}x_k + t_{n+1}x_{n+1}\Big) \\
&\le (1-t_{n+1})f\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k}{1-t_{n+1}}x_k\Big) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \\
&\le (1-t_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k}{1-t_{n+1}}f(x_k) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} t_kf(x_k) + t_{n+1}f(x_{n+1}).
\end{aligned}
$$

由数学归纳法知不等式对所有正整数 n 都是成立的. 下面设 f 是严格凸函数. 只需证: 若 $f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) = t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n)$ 则 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

事实上, 根据严格凸函数的定义, 若 $f(t_1x_1 + t_2x_2) = t_1f(x_1) + t_2f(x_2)$, 则 $x_1 = x_2$. 当 $n > 2$ 时, 若 $f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) = t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n)$, 则由前面的证明过程知必有 $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t_k}{1-t_n}x_k$. 即 $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_kx_k$.

同理也有 $x_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_kx_k$, $\cdots$, $x_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_kx_k$. 所以 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. □

推论8 若 f 是区间 I 上的凸函数, 则对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$, 都有

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big) \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

§ 2.2　Hölder 不等式

引理 1　设 $f(x)=-\ln x$, 则 $f(x)$ 是严格凸函数.

证明. 因对任意的 $x\in[1,2]$ 都有 $0\le x\le\ln 2$, 故 f 在 $[1,2]$ 上是有界的.

对任意的 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^+$, 若 $x_1\ne x_2$, 则 $x_1+x_2=(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2+2\sqrt{x_1x_2}>2\sqrt{x_1x_2}$, 故 $\ln\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{\ln x_1+\ln x_2}{2}$, 因此

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)=-\ln\frac{x_1+x_2}{2}<-\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.\qquad\square$$

定理 2 (**加权均值不等式**)　设 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 都是正数, $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$. 则对任意的正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 都有

$${a_1}^{t_1}{a_2}^{t_2}\cdots{a_n}^{t_n}\le t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n,$$

不等式中的等号成立的充要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证明. 因 $-\ln$ 是严格凸函数, 故由 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned}-\ln(t_1a_1+t_2a_2+\cdots+a_nt_n)&\le-(t_1\ln a_1+t_2\ln a_2+\cdots+t_n\ln a_n)\\&=-\ln({a_1}^{t_1}{a_2}^{t_2}\cdots{a_n}^{t_n}).\end{aligned}\qquad\square$$

定理 3　设 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 都是正数, 且 $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\cdots+\dfrac{1}{p_m}=1$. 若

$$\begin{array}{cccc}a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n},\\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n},\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn}\end{array}$$

都是正数, 则

$$\prod_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big)^{\frac{1}{p_i}}\ge\sum_{j=1}^{n}\Big(\prod_{i=1}^{m}{a_{ij}}^{\frac{1}{p_i}}\Big),$$

等号成立的充要条件是对每个 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 都有

$$a_{1j}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\Big)^{-1}=a_{2j}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\Big)^{-1}=\cdots=a_{mj}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{mj}\Big)^{-1}.$$

证明. 记 $A_i=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$, $A=\displaystyle\prod_{i=1}^{m}{A_i}^{\frac{1}{p_i}}$. 由加权均值不等式知对每个 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 都有

$$\frac{1}{A}\Big(\prod_{i=1}^{m}{a_{ij}}^{\frac{1}{p_i}}\Big)=\prod_{i=1}^{m}\Big(\frac{a_{ij}}{A_i}\Big)^{\frac{1}{p_i}}\le\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}\cdot\frac{a_{ij}}{A_i}.$$

再对 j 从 1 到 n 求和, 得

$$\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n}\Big(\prod_{i=1}^{m}{a_{ij}}^{\frac{1}{p_i}}\Big)\le\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}\cdot\frac{a_{ij}}{A_i}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{A_i}\Big)=1. \qquad \square$$

注 1. 若定理 3 中的 $p_1=p_2=\cdots=p_m=m$, 则有 (**Carlson 不等式**)

$$\prod_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big)^{\frac{1}{m}}\ge\sum_{j=1}^{n}\Big(\prod_{i=1}^{m}{a_{ij}}^{\frac{1}{m}}\Big).$$

注 2. 若把定理 3 中每个 a_{ij} 都换成 ${a_{ij}}^{p_i}$, 则得到

$$\prod_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}{a_{ij}}^{p_i}\Big)^{\frac{1}{p_i}}\ge\sum_{j=1}^{n}\Big(\prod_{i=1}^{m}a_{ij}\Big).$$

注 3. 若 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 都是正数, 视 $\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_m}{u_i}$ 为定理 3 中的 p_i, 则

$$\prod_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big)^{u_i}\ge\Big(\sum_{j=1}^{n}\Big(\prod_{i=1}^{m}{a_{ij}}^{\frac{u_i}{u_1+u_2+\cdots+u_m}}\Big)\Big)^{u_1+u_2+\cdots+u_m},$$

问题 8 上面三个 “注” 中的各不等式的取等条件是什么?

定理 4 (**Hölder 不等式**) 设 $p,q\in\mathbb{R}^+$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是非负实数, 则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\le\Big(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^q\Big)^{\frac{1}{q}},$$

不等式两边相等的充要条件是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全为零, 或 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零, 或对每个 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 都有 ${a_k}^p\Big(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^p\Big)^{-1}={b_k}^q\Big(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^q\Big)^{-1}$. $\square$

注. 若 u,v 都是正数, 则 $\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)^{u}\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k\Big)^{v}\ge\Big(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^{\frac{u}{u+v}}{b_k}^{\frac{v}{u+v}}\Big)^{u+v}$.

问题 9 若 $0<p<1$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 是否对正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$, 总有

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\ge\Big(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^q\Big)^{\frac{1}{q}}\ ?$$

定理 5 (**Cauchy 不等式**) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是实数, 则

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

等号成立的充要条件是存在不全为零的实数 λ,μ 使得对每个 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 都有 $\lambda a_k=\mu b_k$. $\square$

问题 10 如果把 Cauchy 不等式的条件中的 “实数” 改为 “非负实数”, 或 “正实数”, 会把这个定理变得更弱吗?

定理6 (**权方和不等式**) 设 m 是正数. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 都是非负实数, $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是正数, 则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{a_k}^{m+1}}{{b_k}^{m}}\geq\frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\Big)^{m+1}}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\Big)^{m}}.$$

等号成立的充要条件是存在 λ 使得对每个 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 都有 $a_k=\lambda b_k$.

证明. 由 Hölder 不等式 (后面的注), 有

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k\Big)^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{{a_k}^{m+1}}{{b_k}^{m}}\geq\Big(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^{\frac{m}{m+1}}\Big(\frac{{a_k}^{m+1}}{{b_k}^{m}}\Big)^{\frac{1}{m+1}}\Big)^{m+1}=\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)^{m+1}.\qquad\square$$

定理7 (**广义权方和不等式**) 设 m,r 是正数, $r\geq1$. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 都是非负实数, $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是正数, 则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{a_k}^{m+r}}{{b_k}^{m}}\geq\frac{1}{n^{r-1}}\cdot\frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\Big)^{m+r}}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\Big)^{m}}.$$

证明. 当 $r=1$ 时即 Hölder 不等式, 不用讨论. 当 $r>1$ 时,

$$\begin{aligned}n^{r-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k\Big)^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{{a_k}^{m+r}}{{b_k}^{m}}\Big)&=\Big(\sum_{k=1}^{n}1\Big)^{r-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k\Big)^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{{a_k}^{m+r}}{{b_k}^{m}}\Big)^{1}\\&\geq\Big(\sum_{k=1}^{n}1^{\frac{r-1}{m+r}}{b_k}^{\frac{m}{m+r}}\Big(\frac{{a_k}^{m+r}}{{b_k}^{m}}\Big)^{\frac{1}{m+r}}\Big)^{m+r}\\&=\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)^{m+r}.\end{aligned}\qquad\square$$

定理8 (**加权幂平均不等式**) 设 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 都是正数, 且 $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$. 若 $rs\neq0$ 且 $r<s$, 则对任意的正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 都有

$$\Big(t_1{a_1}^{r}+t_2{a_2}^{r}+\cdots+t_n{a_n}^{r}\Big)^{\frac{1}{r}}\leq\Big(t_1{a_1}^{s}+t_2{a_2}^{s}+\cdots+t_n{a_n}^{s}\Big)^{\frac{1}{s}}.$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

解. (1) 若 $0<r<s$, 则由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=1}^{n}t_k{a_k}^{s}\Big)^{\frac{1}{s}}&=\Big(\sum_{k=1}^{n}t_k\Big)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}\Big(\sum_{k=1}^{n}t_k{a_k}^{s}\Big)^{\frac{1}{s}}\\&\geq\Big(\sum_{k=1}^{n}{t_k}^{1-\frac{r}{s}}\cdot\big(t_k{a_k}^{s}\big)^{\frac{r}{s}}\Big)^{\frac{1}{r}}\end{aligned}$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{n} t_k {a_k}^r\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

(2) 若 $r < s < 0$, 则 $0 < -s < -r$, 将 (1) 的结论用于 $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \cdots, \dfrac{1}{a_n}$, 就有

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k \Big(\frac{1}{a_k}\Big)^{-s}\Big)^{\frac{1}{-s}} \le \Big(\sum_{k=1}^{n} t_k \Big(\frac{1}{a_k}\Big)^{-r}\Big)^{\frac{1}{-r}}.$$

(3) 若 $r < 0 < s$, 则 $-r > 0$, 由 Hölder 不等式得

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k {a_k}^r\Big)^{\frac{1}{-r}} \Big(\sum_{k=1}^{n} t_k {a_k}^s\Big)^{\frac{1}{s}} \ge \Big(\sum_{k=1}^{n} \big(t_k {a_k}^r\big)^{\frac{s}{s-r}} \cdot \big(t_k {a_k}^s\big)^{\frac{-r}{s-r}}\Big)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}}$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{n} t_k\Big)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} = 1. \qquad \square$$

推论 9 设 $a > 0$, 记 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) = x^a$.

(1) 若 $a > 1$, 则 f 是严格凸函数;

(2) 若 $a < 1$, 则 $-f$ 是严格凸函数. $\square$

推论 10 (**幂平均不等式**) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数, 若 $rs \ne 0$ 且 $r < s$, 则

$$\Big(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\Big)^{\frac{1}{r}} \le \Big(\frac{a_1^s + a_2^s + \cdots + a_n^s}{n}\Big)^{\frac{1}{s}}. \qquad \square$$

注. 称 $M_p := \Big(\dfrac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n}\Big)^{\frac{1}{p}}$ 为 $a_1, \cdots, a_n$ 的 $\boldsymbol{p}$-**幂均值**.

定理 11 (**均值不等式**) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数, 则

$$n\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big)^{-1} \le \Big(\prod_{k=1}^{n} a_k\Big)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \le \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

其中的每个不等号取等的充要条件都是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

证明. (1) 记 $G = \Big(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\Big)^{\frac{1}{n}}$, $A = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 则由加权均值不等式得 $G \le A$.

(2) 记 $H = n\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}\Big)^{-1}$. 由 (1) 的结论知 $\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}\Big)^{\frac{1}{n}} \le \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}$. 故 $H \le G$.

(3) 记 $Q = \Big(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} {a_k}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, 则由幂平均不等式得 $A \le Q$. $\square$

♣ **注**. 均值不等式中的四个式子 H, G, A, Q, 依次称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的**调和平均值**, **几何平均值**, **算术平均值**, **平方平均值**. 中间的不等式是最常见, 也叫**AM-GM 不等式**.

问题 11 用上面的记号, 均值不等式可简记为 $H \le G \le A \le Q$. 而 H, A, Q 又可分别视为当 $p = -1, 1, 2$ 时的 p-幂均值 M_{-1}, M_1, M_2, 那么, 能否也将 G 视为 p 取某值时的 p-幂均值呢? 这时 p 应为多少?

§ 2.3　其他不等式

定理1 (**Minkowski 不等式**) 若 $p \geq 1$, 则对任意的 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都有

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

证明. 当 $p = 1$ 时, 由三角不等式知结论显然成立. 下设 $p > 1$.

记 $A = \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$, $B = \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$, $C = \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$, 则

$$\begin{aligned}
C^p &= \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|) \cdot |a_k + b_k|^{p-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1} \\
&\leq A \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} \Big(|a_k + b_k|^{p-1}\Big)^{\frac{p}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{p}} + B \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} \Big(|a_k + b_k|^{p-1}\Big)^{\frac{p}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= A \cdot C^{p-1} + B \cdot C^{p-1} = (A + B) C^{p-1},
\end{aligned}$$

所以 $C \leq A + B$. □

注 1. 若 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 则称

$$\|\boldsymbol{x}\|_p := \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

为 $\boldsymbol{x}$ 的 **$\boldsymbol{p}$-模**或 **$\boldsymbol{p}$-范数**. 如果再记

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n),$$

则 Minkowski 不等式可简写为

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|_p \leq \|\boldsymbol{a}\|_p + \|\boldsymbol{b}\|_p.$$

因此, Minkowski 不等式也叫三角不等式.

问题12 设 $0 < p < 1$. 是否对任意的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 都有

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \geq \Big(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ ?$$

性质2 若 $0 < r < s$, 则对任意的 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 都有

$$\|\boldsymbol{a}\|_r \geq \|\boldsymbol{a}\|_s.$$

定理3 (Abel 变换, Abel 恒等式) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是实数. 若对任意的 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$, 记 $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i$, 那么,

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=a_nB_n-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k.$$

证明. 因对任意的 $k\in\{2,\cdots,n\}$ 都有 $b_k=B_k-B_{k-1}$, 故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k&=a_1B_1+\sum_{k=2}^{n}a_k(B_k-B_{k-1})\\&=a_1B_1+\sum_{k=2}^{n}(a_kB_k-a_kB_{k-1})\\&=a_1B_1+\sum_{k=2}^{n}a_kB_k-\sum_{k=2}^{n}a_kB_{k-1}\\&=a_nB_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_kB_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}B_k\\&=a_nB_n+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k.\end{aligned}$$
□

引理4 若 $b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$, $(i_1,i_2,\cdots i_n)$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列, 则对任意 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 都有

$$\sum_{j=1}^{k}b_j\le\sum_{j=1}^{k}b_{i_j}\le\sum_{j=1}^{k}b_{n-j+1}.$$
□

引理5 如果 $b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$, 那么, 存在 $k<n$ 使得 $\sum\limits_{j=1}^{k}b_j=\sum\limits_{j=1}^{k}b_{n-j+1}$ 的充要条件是 $b_1=b_2=\cdots=b_n$. □

定理6 (排序不等式) 设 n 是大于 1 的整数, $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$, $b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$. 若 $(i_1,i_2,\cdots i_n)$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列, 则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}\le\sum_{k=1}^{n}a_kb_{i_k}\le\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

并且 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k$ 的充要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$.

证明. 记 $c_k=b_{i_k}$, $S_1=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}$, $S_2=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kc_k$, 再记 $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}(b_{n-i+1}-c_i)$, 则

$B_n=0$, 又由引理 4 知 $B_k=\sum_{i=1}^{k}(b_{n-i+1}-c_i)\geq 0$. 因此

$$\begin{aligned}S_1-S_2&=\sum_{k=1}^{n}a_k(b_{n-k+1}-c_k)\\&=a_nB_n-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k\leq 0.\end{aligned}$$

记 $S_3=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$, $D_k=\sum_{i=1}^{k}(c_i-b_i)$, 则有

$$\begin{aligned}S_2-S_3&=\sum_{k=1}^{n}a_k(c_k-b_k)\\&=a_nD_n-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)D_k\leq 0.\end{aligned}$$

当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时, 显然有 $\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$.

反过来, 若 $\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$ 成立, 且 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 不成立, 则存在某 $k<n$ 使得 $a_{k+1}-a_k\neq 0$, 因此 $B_k=D_k=0$, 即 $\sum_{i=1}^{k}(b_{n-i+1}-c_i)=\sum_{i=1}^{k}(b_i-c_i)=0$, 于是 $\sum_{i=1}^{k}b_i=\sum_{i=1}^{k}c_i=\sum_{i=1}^{k}b_{n-i+1}$. 再用引理 5 就得到 $b_1=b_2=\cdots=b_n$. □

定理 7 (Chebyshev **不等式**) 若 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$, $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}\leq\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k\Big)\leq\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

证明. 记 $A=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}$, $B=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$. 由排序不等式知

$$\begin{aligned}&A\leq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leq B,\\&A\leq a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1\leq B,\\&\quad\cdots\\&A\leq a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}\leq B,\end{aligned}$$

以上 n 个式子相加,得 $nA\leq\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k\Big)\leq nB$. □

问题 13 Chebyshev 不等式中, 第一个不等号成为等号的充要条件是什么?

定理 8 (**推广的 Bernoulli 不等式**) 设正整数 $n \geq 2$, 实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都大于 -1, 并且它们有相同的符号, 则

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) > 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

证明. 记 $b_k = 1 + a_k$, 则要证的不等式变为 $(n-1) + b_1 b_2 \cdots b_n > b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. 因 $b_k > 0$, 并且, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 同时大于 1 或同时小于 1, 故由排序不等式得

$$1 + b_1 b_2 \cdots b_k > b_1 b_2 \cdots b_{k-1} + b_k.$$

将上式对 k 从 2 到 n 求和, 即得 $(n-1) + b_1 b_2 \cdots b_n > b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. □

定理 9 (**Bernoulli 不等式**) 设正整数 $n \geq 2$, 实数 $x > -1$ 且 $x \neq 0$, 则

$$(1+x)^n > 1 + nx. \qquad \square$$

定理 10 (**Jordan 不等式**) 若 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, 则 $x > \sin x > \dfrac{2}{\pi} x$. □

第三章　初等函数

§ 3.1　基本概念

定义 1　设 D 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 对任意的 $x \in D$ 都有 $-x \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$.

(1) 若对任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 f 为**奇函数**.

(2) 若对任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 f 为**偶函数**.

由定义可见, 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称. $\mathbb{R}$ 上的常值函数 0 既是奇函数也是偶函数.

例 1　(1) 若偶数 $n \neq 0$, 则 x^n 是偶函数. 若 k 是整数, 则 x^{2k-1} 是奇函数.

(2) $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} + \dfrac{x}{2}$ 是偶函数.

(3) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ 是奇函数.

例 2　设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的函数, 令

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$
$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

则 g 是偶函数, h 是奇函数, 且 $f = g + h$.

由此可见, $\mathbb{R}$ 上的函数都可表为一个奇函数与一个偶函数之和.

例 3　设 f, g 都是 D 上的函数.

(1) 若 f, g 都是奇函数, 则 $f + g$ 是也奇函数, 而 $f \cdot g$ 是偶函数.

(2) 若 f, g 都是偶函数, 则 $f + g$, $f \cdot g$ 都是偶函数.

(3) 若 f 是奇函数, g 是偶函数, 则 $f \cdot g$ 是奇函数.

(4) 若 $f(D) \subset D$, f 是偶函数, g 是奇函数或偶函数, 则 $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 都是偶函数.

例 4　设 $E=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}: f$ 是偶函数$\}$, $O=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}: f$ 是奇函数$\}$. 是否存在单射 $\varphi: O\to E$? 是否存在单射 $\psi: E\to O$?

解. (1) 对任意的 $f\in O$, 令

$$g_f(t)=\begin{cases} f(t), & t\geq 0,\\ -f(t), & t<0,\end{cases}$$

则 $\varphi: O\to E, f\mapsto g_f$ 是单射.

对任意的 $f\in E$, 令

$$h_f(t)=\begin{cases} f(|t|-1)\cdot\dfrac{t}{|t|}, & |t|>1,\\ f(0)\cdot t, & |t|\leq 1,\end{cases}$$

则 $\psi: E\to O, f\mapsto h_f$ 是单射. □

定义 2 设 D 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $f: D\to\mathbb{R}$. 若存在 $T\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 使得对任意的 $x\in D$, 都有 $x+T\in D$, $x-T\in D$, 且

$$f(x+T)=f(x-T)=f(x),$$

则称 f 是**周期函数**, 称 T 为 f 的一个**周期**.

性质 1 若 T 是周期函数 f 的一个周期, 则对任意的非零整数 n, nT 都是 f 的周期.

定义 3 设 f 是周期函数, 正数 T 是 f 的一个周期. 若比 T 小的正数都不是 f 的周期, 则称 T 是 f 的**最小正周期**.

例 5　(1) $\mathbb{R}$ 上的常值函数是周期函数, 任意非零实数都是它的周期, 因此它没有最小正周期.

(2) Dirichlet 函数是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 每个非零有理数都是它的周期, 因此它没有最小正周期. Riemann 函数也是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 它以 1 为最小正周期.

例 6　sin, cos 都是 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的周期函数. tan 是 $\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi+\dfrac{\pi}{2}: k\in\mathbb{Z}\right\}$ 上的周期函数.

例 7　设 f 是周期函数, $g(x)=f(ax+b)$ (其中 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a\neq 0$), 则 g 也是周期函数, 并且, 若 T 是 f 的最小正周期, 则 $\dfrac{T}{|a|}$ 是 g 的最小正周期.

解. 设 f 是 D 上的函数, 以 T 为周期. 记 $A=\{x: ax+b\in D\}$, 则 g 是 A 上的函

数. 对任意的 $x\in A$, 因 $a\Big(x\pm\dfrac{T}{a}\Big)+b=ax+b\pm T\in D$, 且

$$g\Big(x\pm\frac{T}{a}\Big)=f\Big(a\Big(x\pm\frac{T}{a}\Big)+b\Big)=f(ax+b\pm T)=f(ax+b)=g(x),$$

所以 g 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数.

设 T 是 f 的最小正周期. 首先由前面的结论知 $\dfrac{T}{|a|}$ 也是 g 的一个正周期.

设 t 是 g 的一个正周期. 注意到

$$f(x)=f\Big(a\cdot\frac{x-b}{a}+b\Big)=g\Big(\frac{x-b}{a}\Big)=g\Big(\frac{1}{a}x+\frac{-b}{a}\Big),$$

由前面的结论知 $t|a|=\dfrac{t}{|1/a|}$ 也是 f 的正周期. 因 T 是 f 的最小正周期, 故 $T\le t|a|$.

因此 $\dfrac{T}{|a|}\le t$, 所以 $\dfrac{T}{|a|}$ 是 g 的最小正周期. □

例 8 设 $D=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\Big[k,\ k+\dfrac{1}{2}+\dfrac{k}{2|k|+1}\Big]$. 定义 $f:D\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 1$. 证明: 对任意的 $x\in D$ 都有 $x+1\in D$ 且 $f(x+1)=f(x)$. 问 f 是周期函数吗?

例 9 设 $f:D\to\mathbb{R}$ 是周期函数, $g:f(D)\to\mathbb{R}$, 则 $g\circ f$ 也是周期函数. 并且, 若 $g:f(D)\to\mathbb{R}$ 是单射, T 是 f 的最小正周期, 则 T 也是 $g\circ f$ 的最小正周期.

解. (只证第二部分) 显然 T 也是 $g\circ f$ 的正周期.

记 $h:f(D)\to g(f(D))$, $y\mapsto g(y)$, 则 h 是双射.

设 t 是 $g\circ f$ 的一个正周期, 则 t 也是 $f=h^{-1}\circ(g\circ f)$ 的正周期.

因 T 是 f 的最小正周期, 故 $T\le t$. 所以 T 是 $g\circ f$ 的最小正周期. □

例 10 设 f_1, f_2 都是 D 上的周期函数, 其周期分别为 T_1, T_2. 若 $\dfrac{T_1}{T_2}\in\mathbb{Q}$, 则 f_1+f_2, f_1-f_2, $f\cdot f_2$ 都是周期函数; 当 f_2 不恒为零时, $\dfrac{f}{f_2}$ 也是周期函数.

解. 设 $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{m}{n}$, 则 $nT_1=mT_2$, 因此 nT_1 既是 f_1 的周期也是 f_2 的周期, 所以它也是 f_1+f_2 等函数的周期. □

例 11 是否存在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f, 使得 1 和 $\sqrt{2}$ 都是 f 的周期, 且 f 不是常值函数?

解. 在 $\mathbb{R}$ 上定义关系 R: $xRy\iff x-y\in\{m+n\sqrt{2}:m,n\in\mathbb{Z}\}$. 直接验证可知 R 是 $\mathbb{R}$ 上的等价关系. (由**选择公理**知) 在每个等价类 A 中选定一个代表元 $\varphi(A)$. 定义

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\varphi([x])\ (\text{其中 } [x] \text{ 表示 } x \text{ 所在的等价类}).$$

若 $\sqrt{3}-0=m+n\sqrt{2}$, $m,n\in\mathbb{Z}$, 则 m,n 都不是 0, 且 $m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}=3$. 这

与 $\sqrt{2}$ 是无理数相矛盾. 所以 0 和 $\sqrt{3}$ 在不同的等价类中, 故 $f(0) \neq f(\sqrt{3})$, 这说明 f 不是常值函数. 而 $x+1, x-1, x+\sqrt{2}, x-\sqrt{2}$ 都和 x 等价, 因此

$$f(x+1)=f(x-1)=f(x+\sqrt{2})=f(x-\sqrt{2})=f(x). \qquad \square$$

定义 4 设 $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$.

(1) 若对任意的 $x, y \in D$, 只要 $x<y$, 就有 $f(x) \leq f(y)$, 则称 f 是**递增的**.

(2) 若对任意的 $x, y \in D$, 只要 $x<y$, 就有 $f(x)<f(y)$, 则称 f 是**严格增的**.

(3) 若对任意的 $x, y \in D$, 只要 $x<y$, 就有 $f(x) \geq f(y)$, 则称 f 是**递减的**.

(4) 若对任意的 $x, y \in D$, 只要 $x<y$, 就有 $f(x)>f(y)$, 则称 f 是**严格减的**.

(5) 若 f 是递增的或递减的, 则称 f 是**单调的**.

(6) 若 f 是严格增的或严格减的, 则称 f 是**严格单调的**.

性质 2 若 $f: D \to \mathbb{R}$ 是严格单调的, 则 f 是单射, 因此 $f: D \to f(D)$ 有逆映射.

例 12 若 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是递增的, 且 $f \circ f=I_{\mathbb{R}}$, 证明 $f=I_{\mathbb{R}}$. 若 f 是递减的, 是否一定有 $f=-I_{\mathbb{R}}$?

解. 反例可考虑 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x, & x \geq 0 \\ -2x, & x<0\end{cases}$. $\square$

例 13 设 $f: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$. 证明: 若 $\dfrac{f(t)}{t}$ 递增, 则 $f(x+y) \geq f(x)+f(y)$.

解. 因 $x+y>x$, 故 $\dfrac{f(x+y)}{x+y} \geq \dfrac{f(x)}{x}$. 因 $x+y>y$, 故 $\dfrac{f(x+y)}{x+y} \geq \dfrac{f(y)}{y}$. 于是

$$f(x+y)=\frac{x f(x+y)}{x+y}+\frac{y f(x+y)}{x+y} \geq f(x)+f(y). \qquad \square$$

定义 5 设 $f: D \to \mathbb{R}$, E 是 D 的非空子集.

(1) 如果 $f(E)$ 有上界, 则称 f 在 E 上**有上界**, 并把 $f(E)$ 的上 (确) 界称为 f 在 E 上的**上 (确) 界**.

(2) 如果 $f(E)$ 有下界, 则称 f 在 E 上**有下界**, 并把 $f(E)$ 的下 (确) 界称为 f 在 E 上的**下 (确) 界**.

(3) 如果 f 在 E 上既有下界又有上界, 则称 f 在 E 上**有界**.

例 14 设 $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 是递增的. 证明: 若 β 是数列 $\{f(n)\}$ 的一个上界, 则 β 也是 f 的上界. 若 β 是 $\{f(n)\}$ 的上确界, 则它也是 f 的上确界.

解. (1) 对任意 $x\in(0,+\infty)$, 都存在正整数 n 使得 $n>x$. 于是 $f(x)\le f(n)\le\beta$.

(2) 若 γ 是 f 的上界, 则它也是 $\{f(n)\}$ 的上界, 因此 $\{f(n)\}$ 的上确界 $\beta\le\gamma$. 又因前面已证 β 是 f 的上界, 因此它就是 f 的最小上界. □

例 15 证明: (1) 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 严格增且有上界;

(2) 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 严格减且有下界; 并且

(3) $\sup\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n : n\in\mathbb{N}^*\right\}=\inf\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} : n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

解. (1) (2) 的严格单调性可由均值不等式得到. 记 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, 则 $x_1\le x_n<y_n\le y_1$, 这就得到它们的有界性.

(3) 由**确界存在定理**知题中的上确界和下确界都是存在的.

设 $\alpha=\sup\{x_n : n\in\mathbb{N}^*\}$, $\beta=\inf\{y_n : n\in\mathbb{N}^*\}$.

因对任意的正整数 m,n, 都有 $x_n\le x_{m+n}\le y_{m+n}\le y_m$, 故每个 y_m 都是 $\{x_n : n\in\mathbb{N}^*\}$ 的上界, 因此对任意正整数 m 都有 $\alpha\le y_m$. 这又意味着 α 是 $\{y_m : m\in\mathbb{N}^*\}$ 的下界, 因此又有 $\alpha\le\beta$.

于是, 对任意正整数 n 都有 $x_n\le\alpha\le\beta\le y_n$, 进而 $0\le\beta-\alpha\le y_n-x_n$.

因对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 n 使得 $n>\dfrac{y_1}{\varepsilon}$, 故

$$0\le\beta-\alpha\le y_n-x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\frac{y_1}{n}<\varepsilon,$$

所以 $\beta-\alpha=0$. □

例 16 设 $a<b$, f 是 (a,b) 上的凸函数, 证明 f 有下界.

解. 记 $c=\dfrac{a+b}{2}$. 只要证 f 在 (a,c) 和 (c,b) 上都有下界即可. 取定 $d\in(c,b)$. 对任意的 $x\in(a,c)$, 因

$$c=\frac{d-c}{d-x}x+\frac{c-x}{d-x}d,$$

故

$$f(c)\le\frac{d-c}{d-x}f(x)+\frac{c-x}{d-x}f(d).$$

因此

$$f(x)\ge\frac{d-x}{d-c}f(c)-\frac{c-x}{d-c}f(d)$$

$$\geq -\frac{d-x}{d-c}|f(c)| - \frac{c-x}{d-c}|f(d)|$$
$$\geq -\frac{d-a}{d-c}|f(c)| - \frac{c-a}{d-c}|f(d)|.$$

所以 f 在 (a,c) 上有下界. 同理 f 在 (c,b) 上也有下界. 所以 f 在 (a,b) 上有下界. $\square$

§ 3.2 初等函数

1．常值函数, 指数函数, 正弦函数, 余弦函数, 正切函数

常值函数, 指数函数, 正弦函数, 余弦函数, 都是 $\mathbb{R}$ 上的函数. 我们列举它们的一些重要性质.

指数函数是严格增的, 无上界, 且 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} e^x = 0$, 值域为 $(0,+\infty)$. 指数函数也记为 exp.

正弦函数 sin 和余弦函数 cos 都是以 2π 为最小正周期的周期函数, 它们的值域都是 $[-1,1]$, 并且

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x, \quad \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x.$$

sin 是奇函数, 其零点集为 $\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$, 它在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格增, 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上严格减. 并且 sin 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称, 即 $\sin(\pi - x) = \sin x$.

由上述性质可以得到 cos 的对应的性质. 例如 cos 的图像关于直线 $x=0$ 对称.

正切函数 tan 是 $\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\}$ 上的函数, $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, 它是以 π 为最小正周期的周期函数, 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是严格增的, 无上界也无下界, 值域为 $\mathbb{R}$.

2．对数函数, 反正弦函数, 反余弦函数, 反正切函数

对数函数 ln 是 exp 的反函数.

反正弦函数 arcsin 是 $\sin : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ 的反函数.

反余弦函数 arccos 是 $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ 的反函数.

反正切函数 arctan 是 $\tan : \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ 的反函数.

根据反函数的性质, 可以知道这些函数的值域和单调性等性质和图像等直观信息.

3．幂函数

首先对不等于 1 的正数 α 定义

$$\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \to e^{\alpha \ln x},$$

称之为**幂函数**. 并把 $\varphi(x)$ 记为 x^α, 即

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

对不同的 α, 可将 φ 做**适当的**延拓 (细节留作**习题**).

4. 初等函数

常值函数, 指数函数, 正弦函数, 余弦函数, 正切函数, 对数函数, 反正弦函数, 反余弦函数, 反正切函数, 幂函数, 统称为**基本初等函数**.

由有限个基本初等函数, 经有限次的四则运算和复合所得到的函数, 称为**初等函数**.

例 1 多项式函数 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ (其中 n 是正整数, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是实数) 是初等函数. □

例 2 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^{\sin x}$ 是初等函数. □

问题 14 $|x|$ 是初等函数吗? $\operatorname{sgn}(x) = \dfrac{x}{|x|}$ 是初等函数吗?

5. 双曲函数和反双曲函数

称

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

为**双曲正弦**, 它是奇函数, 值域是 $\mathbb{R}$, 且在 $\mathbb{R}$ 上严格增. 其反函数记为 arsinh, 称为**反双曲正弦**.

称

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

为**双曲余弦**. 它是偶函数, 值域是 $[1, +\infty)$, 在 $(-\infty, 0]$ 上严格减, 在 $[0, +\infty)$ 上严格增. $\cosh : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ 的反函数记为 arcosh, 称为**反双曲余弦**.

称

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

为**双曲正切**. 它是严格增的奇函数, 值域是 $(-1,1)$. 其反函数记为 artanh, 称为**反双曲正切**.

双曲正弦, 双曲余弦和双曲正切统称为双曲函数 (hyperbolic function), 其反函数统称为反双曲函数.

双曲函数 $\sinh, \cosh, \tanh$ 也分别记为 $\mathrm{sh}, \mathrm{ch}, \mathrm{th}$. 反双曲函数 $\mathrm{arsinh}, \mathrm{arcosh}, \mathrm{artanh}$ 也分别记为 $\mathrm{arsh}, \mathrm{arch}, \mathrm{arth}$. 或 $\sinh^{-1}, \cosh^{-1}, \tanh^{-1}$, 或 $\mathrm{sh}^{-1}, \mathrm{ch}^{-1}, \mathrm{th}^{-1}$.

问题 15 研究双曲正弦, 双曲余弦和双曲正切的图像, 写出反双曲正弦, 反双曲余弦, 反双曲正切的表达式.

$$\mathrm{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$$

$$\mathrm{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),$$

$$\mathrm{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

问题 16 课外扩展阅读: 为什么正弦函数 sin 的反函数记为 arcsin, 而反双曲正弦函数记为 arsinh ?

§ 3.3 初等函数性质

初等函数 f 的**自然定义域**是指使得表达式 $f(x)$ 有意义的实数 x 所构成的集合.

性质 1 *设 f 是初等函数, 其自然定义域为 D. 若 $[a,b]\subseteq D$, 则 f 在 $[a,b]$ 上有最大值, 也有最小值, 并且 $f([a,b])$ 也是一个闭区间.* (不证明)

例 1 若 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$, $g(x)=f^{-1}(x)$, 求 $g(\frac{3}{5})$.

解. 由 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系知, 求 $f^{-1}(\frac{3}{5})$, 就是解方程 $\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=\dfrac{3}{5}$. 容易解出 $x=2$. □

例 2 已知 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的图像与它的反函数的图像完全重合, 求该函数该具有何种形式? 这里 a, b, c, d 为常数, 且 a, c 不同时为 0.

解. 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, 得 $x=\dfrac{dy-b}{-cy+a}$, 因此 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=\dfrac{dx-b}{-cx+a}$. 因

$f(x) = f^{-1}(x)$, 即
$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{dx-b}{-cx+a},$$
故
$$c(a+d)x^2 + (d^2-a^2)x - b(a+d) = 0,$$
因此有
$$c(a+d) = 0, \quad d^2 - a^2 = 0, \quad -b(a+d) = 0.$$
所以 $a+d=0$; 或者 $a=d\neq 0$ 且 $b=c=0$.

于是 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$, 或 $f(x) = x$. □

例3 求 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ 的单调区间.

解. f 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 且 $f(-x) = -f(x)$.

任取 $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则
$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\Big(1 - \frac{1}{x_1x_2}\Big).$$

(1) 当 $0 < x_1 < x_2 \leq 1$ 时, 有 $f(x_2) < f(x_1)$. 因此 f 在 $(0,1]$ 上严格单调递减. 由 f 是奇函数知, $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 内也严格单调递减.

(2) 当 $1 < x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$. 因此 f 在 $(0,1]$ 上严格单调递增. 由 f 是奇函数知, $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 内也严格单调递增. □

例4 设 $0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{2}$, 且
$$\cos\alpha = \tan\beta, \quad \cos\beta = \tan\gamma, \quad \cos\gamma = \tan\alpha.$$
求证: $\alpha = \beta = \gamma$.

解. 记 $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, 则 $B = \{\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma\}$.

不妨设 $\alpha = \min A$, 则由 cos 的单调性知 $\cos\alpha = \max B$.

而由 $\cos\alpha = \tan\beta$ 知 $\tan\beta = \max B$, 由 tan 的单调性知 $\beta = \max A$.

由 cos 的单调性知 $\cos\beta = \min B$, 而 $\cos\beta = \tan\gamma$, 故 $\tan\gamma = \min B$.

再由 tan 的单调性知 $\gamma = \min A$,

所以 $\alpha = \gamma$. 再由轮换对称性知 $\gamma = \beta$. □

例5 证明函数 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上有下界而无上界. 函数 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界 (1 是一个上界, 0 是一个下界).

例6 证明 $f(x)=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上无界, 而在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的任一闭区间 $[a,b]$ 上有界.

解. (1) 对任意的 $A>0$, 取 $x_0=\arctan(A+1)$, 则 $x_0\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且有

$$|\tan x_0|=|\tan(\arctan(A+1))|=A+1>A.$$

(2) 任取 $[a,b]\subseteq\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 由于 $f(x)=\tan x$ 在 $[a,b]$ 上递增, 当 $x\in[a,b]$ 时, 有 $\tan a\le\tan x\le\tan b$. 记 $A=\max\{|\tan a|,|\tan b|\}$, 则对一切 $x\in[a,b]$, 均有 $|\tan x|\le A$. □

例7 证明 $f(x)=\cos(x^2)$ 不是周期函数.

解. 假设 $f(x)=\cos(x^2)$ 有周期 T 且不妨设 $T>0$, 则对任意实数 x 都有

$$\cos((x+T)^2)=\cos(x^2).$$

令 $x=0$, 得 $\cos(T^2)=1$, 因此存在 $k\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $T^2=2k\pi$.

再令 $x=\sqrt{2}T$, 则 $\cos((\sqrt{2}+1)^2T^2)=\cos(2T^2)=\cos(4k\pi)=1$, 故存在 $m\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $(\sqrt{2}+1)^2T^2=2m\pi$. 于是有 $(\sqrt{2}+1)^2=\dfrac{m}{k}$. 但这是不可能的. □

例8 设 $f(x)=\sin^n x\ (n\in\mathbb{N}^+)$ 的最小正周期为 T, 求证:

$$T=\begin{cases}2\pi, & n=2k+1,\\ \pi, & n=2k.\end{cases}$$

解. (1) $n=2k+1$ 时, 2π 是 $f(x)$ 的一个周期.

假设 T_0 也是 $f(x)$ 的周期, 且 $0<T_0<2\pi$, 则对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 总有 $f(x+T_0)=f(x)$, 即 $\sin^{2k+1}(x+T_0)=\sin^{2k+1}x$. 令 $x=\dfrac{\pi}{2}$, 得 $\sin^{2k+1}(\dfrac{\pi}{2}+T_0)=1$, 即 $\cos^{2k+1}T_0=1$, 故 $\cos T_0=1$. 但由 $0<T_0<2\pi$ 知 $\cos T_0<1$, 矛盾.

(2) $n=2k$ 时, $f(x)=(\sin^2x)^k$, 故 π 是 $f(x)$ 的一个周期.

假设 T_0 也是 $f(x)$ 的周期, 且 $0<T_0<\pi$, 则对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 总有 $f(x+T_0)=f(x)$, 即 $\sin^{2k}(x+T_0)=\sin^{2k}x$. 令 $x=0$ 得 $\sin^{2k}T_0=0$, 故 $\sin T_0=0$. 但由 $0<T_0<\pi$ 知, $\sin T_0>0$, 矛盾. □

例 9 若 $y=f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的图像关于 $x=a$ 对称, 关于 $x=b$ 对称, 且 $a\neq b$, 则 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数.

解. 设 $(x,f(x))$ 在 $f(x)$ 图像上, 由条件知 $(2a-x,f(x))$ 和 $(2b-x,f(x))$ 都在图像上, 即 $f(2a-x)=f(2b-x)=f(x)$. 令 x 取 $2a-x$, 则 $f(x)=f(2b-2a+x)$. □

例 10 设 $\dfrac{3}{2}\leq x\leq 5$, 证明 $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$.

解. 由幂平均不等式知,

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}\\
=&\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}\\
\leq&4\sqrt{\frac{x+1+x+1+2x-3+15-3x}{4}}\\
=&2\sqrt{14+x}\leq 2\sqrt{19}.
\end{aligned}$$

因两个不等号中至少有一个是严格的, 所以有

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}.$$ □

例 11 设正数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$, 证明:

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1.$$

解. 注意 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x\in(0,+\infty)$, 则 $-f$ 是严格凸函数. 又 $a+b+c=1$, 于是

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=af(1+b-c)+bf(1+c-a)+cf(1+a-b)\\
&\leq f(a(1+b-c)+b(1+c-a)+c(1+a-b))\\
&=f(a+b+c)=f(1)=1.
\end{aligned}$$ □

例 12 证明: 在 $\triangle ABC$ 中, 总有

(1) $\sin A+\sin B+\sin C\leq\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$;

(2) $\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$.

解. (1) 设 $f(x)=-\sin x$, $0<x<\pi$, 则 f 是严格凸函数. 由 Jensen 不等式知

$$f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f\Big(\frac{A+B+C}{3}\Big),$$

故

$$\sin A+\sin B+\sin C\leq 3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

(2) 设 $g(x)=-\cos x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. 易知 g 是严格凸函数, 因此

$$g\Big(\frac{A}{2}\Big)+g\Big(\frac{B}{2}\Big)+g\Big(\frac{C}{2}\Big)\geq 3g\Big(\frac{A+B+C}{6}\Big),$$

因此

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$ □

例 13 已知

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$$

且对任意的 $x\in[t,t+2]$, 不等式 $f(x+t)\geq 2f(x)$ 恒成立. 求 t 的取值范围.

解. 因 $f(x)=x^2\mathrm{sgn}(x)$, 故

$$2f(x)=2x^2\mathrm{sgn}(x)=(\sqrt{2}x)^2\mathrm{sgn}(\sqrt{2}x)=f(\sqrt{2}x),$$

因此不等式 $f(x+t)\geq 2f(x)$ 即 $f(x+t)\geq f(\sqrt{2}x)$. 因

$$f(-x)=x^2\mathrm{sgn}(-x)=-x^2\mathrm{sgn}(x)=-f(x),$$

故 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数.

又因 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上严格递增, 故 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的严格递增函数. 于是

$$f(x+t)\geq f(\sqrt{2}x)\quad\Longleftrightarrow\quad x+t\geq\sqrt{2}x.$$

所以, 题目的条件就是: $(\sqrt{2}-1)x\leq t$ 对任意的 $x\in[t,t+2]$ 恒成立.

由此得 $(\sqrt{2}-1)(t+2)\leq t$, 即 $t\geq\sqrt{2}$. □

例 14 设 $a\in\mathbb{R}$. 已知 $x,y\in\big[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\big]$, 且

$$\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0,\\ 4y^3+\dfrac{1}{2}\sin 2y+a=0.\end{cases}$$

求 $\cos(x+2y)$.

解. 令 $f(t)=t^3+\sin t$, 则

$$f(x)=x^3+\sin x=2a,$$

$$f(2y)=8y^3+\sin 2y=2(4y^3+\sin y\cos y)=-2a.$$

由于 $f(t)$ 为奇函数, 故 $f(-2y)=2a=f(x)$. 又易知 $f(t)$ 在 $\big[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\big]$ 上严格单调递增, 所以 $-2y=x$, 即 $x+2y=0$. 所以 $\cos(x+2y)=1$. □

例 15 求 $f(x)=|x-1|+|x-2|$ 的最小值.

解. 首先由不等式

$$|x-1|+|x-2|\geq|(x-1)-(x-2)|=1,$$

知 $f(x)\geq 1$. 又因 $f(1)=1$, 故 $f(x)$ 的最小值为 1. □

例 16 已知 $x\in(-\infty,-1]$, 求 $y=x^2+x\sqrt{x^2-1}$ 的最大值.

解. 首先有

$$\begin{aligned}2y&=x^2+2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)+1\\&=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+1.\end{aligned}$$

因 $t(x)=x+\sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ 在 $(-\infty,-1]$ 上递减, 故 $-1=t(-1)\leq t(x)<0$, 从而 $2y\leq 2$, 即 $y\leq 1$. 所以当 $x=-1$ 时, y 取到最大值 1. □

例 17 求 $f(x)=2-2a\cos x-\sin^2 x$ 的最值, 其中 a 为参数.

解. 首先有 $f(x)=\cos^2 x-2a\cos x+1=(\cos x-a)^2+1-a^2$.

令 $t=\cos x$, $f(x)\triangleq g(t)=(t-a)^2+1-a^2$, $t\in[-1,1]$.

(1) $a<-1$ 时, $g(t)$ 在 $[-1,1]$ 上递增, 故 $f(x)$ 的最大值 $M=g(1)=2-2a$, 最小值 $m=g(-1)=2+2a$.

(2) $-1\leq a<0$ 时, $g(t)$ 在 $[-1,a]$ 上递减, 在 $[a,1]$ 上递增, 故 $M=g(1)=2-2a$, $m=g(a)=1-a^2$.

(3) $0\leq a<1$ 时, $g(t)$ 在 $[-1,a]$ 上递减, 在 $[a,1]$ 上递增, 故 $M=g(-1)=2+2a$, $m=g(a)=1-a^2$.

(4) $a\geq 1$ 时, $g(t)$ 在 $[-1,1]$ 上递减, 故 $M=g(-1)=2+2a$, $m=g(1)=2-2a$.

综上, $f(x)$ 的最大值为

$$M=\begin{cases}2-2a, & a<0,\\ 2+2a, & a\geq 0,\end{cases}$$

最小值为

$$m=\begin{cases}2+2a, & a<-1,\\ 1-a^2, & -1\leq a<1,\\ 2-2a, & a\geq 1,\end{cases}$$

□

例 18 求函数 $y=\dfrac{225}{4\sin^2 x}+\dfrac{2}{\cos x}$ 在 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的最小值.

解. 对任意的 $k>0$, 总有

$$\begin{aligned} y&=\left(\frac{225}{4\sin^2 x}+k\sin^2 x\right)+\left(k\cos^2 x+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}\right)-k\\ &\geq 15\sqrt{k}+3\sqrt[3]{k}-k, \end{aligned}$$

其中等号成立当且仅当

$$\begin{cases} \dfrac{225}{4\sin^2 x}=k\sin^2 x,\\ k\cos^2 x=\dfrac{1}{\cos x}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \sin^2 x=\dfrac{15}{2\sqrt{k}},\\ \cos^2 x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}} \end{cases}$$

时成立.

此时 $\dfrac{15}{2\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}}=1$. 设 $\dfrac{1}{k}=t^6$, 则 $2t^4+15t^3-2=0$, 即 $(2t-1)(t^3+8t^2+4t+2)=0$. 注意到 $\dfrac{15}{2\sqrt{k}}=\sin^2 x\leq 1$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}}=\cos^2 x\leq 1$, 知满足限制条件的根只有 $t=\dfrac{1}{2}$.

当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时, $k=\dfrac{1}{t^6}=64$, 此时等号成立, 即 $y\geq 15\sqrt{64}+3\sqrt[3]{64}-64=68$. □

§ 3.4 函数方程

函数方程指是含有未知函数的方程. 使函数方程成立的函数叫做**函数方程的解**. 求函数方程的解或证明函数方程无解的过程叫**解函数方程**.

例 1 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(0)=1$, 且对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$, 都有

$$f(x-y)=f(x)-(2x-y+1)y,$$

求 $f(x)$.

解. 令 $x=0$, 得 $f(-y)=f(0)-(-y+1)y$, 因此

$$f(-y)=y^2-y+1=(-y)^2+(-y)+1.$$

所以 $f(x)=x^2+x+1$. □

例 2 设 f 是 $\mathbb{N}^+$ 上的函数, $f(1)=1$, 且对任意正整数 x, y, 均有

$$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy,$$

求 $f(x)$.

解. 令 $y=1$, 得 $f(x)+f(1)=f(x+1)-x$, 即 $f(x+1)-f(x)=x+1$. 在式中依次令 $x=1,2,3,\cdots,n-1$, 累加得

$$f(n)-f(1)=2+3+4+\cdots+n=\frac{(n+2)(n-1)}{2}.$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x^2+x)$, $x\in\mathbb{N}^+$. □

例 3 已知 $f\big(\dfrac{1+x}{x}\big)=\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$, 求 $f(x)$.

解. (注意 f 的定义域)

$$\begin{aligned}f\Big(\frac{1+x}{x}\Big)&=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+2x+1-2x}{x^2}+\frac{1}{x}\\&=\Big(\frac{1+x}{x}\Big)^2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=\Big(\frac{1+x}{x}\Big)^2-\frac{1+x-x}{x}\\&=\Big(\frac{1+x}{x}\Big)^2-\frac{1+x}{x}+1.\end{aligned}$$

又 $\dfrac{1+x}{x}=1+\dfrac{1}{x}\neq 1$, 所以 $f(x)=x^2-x+1$, $x\neq 1$. □

例 4 设 $f\big(x+\dfrac{1}{x}\big)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$, $g\big(x+\dfrac{1}{x}\big)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$, 求 $f(g(x))$.

解. 易见 $f(x)=x^2-2$ $(|x|\geq 2)$. 因

$$g\big(x+\frac{1}{x}\big)=\big(x+\frac{1}{x}\big)^3-3\big(x+\frac{1}{x}\big),$$

故 $g(x)=x^3-3x$ $(|x|\geq 2)$. 若 $2\leq z<y$, 则

$$g(y)-g(z)=y^3-3y-(z^3-3z)=(y-z)(y^2+yz+z^2-3)>0,$$

因此 g 在 $[2,+\infty)$ 上严格增. 因 g 是奇函数, 故 g 在 $(-\infty,-2]$ 上也严格增.

于是当 $x\in[2,+\infty)$ 时 $g(x)\geq g(2)=2$, 当 $x\in(-\infty,-2]$ 时 $g(x)\leq g(-2)=-2$.

因此当 $|x|\geq 2$ 时, 总有 $|g(x)|\geq 2$, 所以

$$f(g(x))=(x^3-3x)^2-2=x^6-6x^4+9x^2-2\quad(|x|\geq 2).$$ □

例 5 已知 $f\Big(\dfrac{1-x}{1+x}\Big)=\dfrac{x^2+1}{2x}$, 求 $f(x)$.

解. 设 $t=\dfrac{1-x}{1+x}$. 因 $x\neq -1$, $x\neq 0$, 故 $t\neq\pm 1$. 由 $t=\dfrac{1-x}{1+x}$, 得 $x=\dfrac{1-t}{1+t}$, 因此

$$f(t)=\frac{\big(\frac{1-t}{1+t}\big)^2+1}{2\big(\frac{1-t}{1+t}\big)}=\frac{1+t^2}{1-t^2},$$

所以 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ $(x\neq\pm 1)$. □

例 6 已知 $f(\cos x-1)=\cos^2 x$, 求 $f(x)$.

解. 令 $\cos x-1=u$, 则 $-2\le u\le 0$, $\cos x=u+1$,

$$f(u)=f(\cos x-1)=(u+1)^2.$$

所以 $f(x)=(x+1)^2$, $x\in[-2,0]$. □

例 7 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\big(\frac{1}{x}\big)=cx$, 其中 a, b, c 均为非零常数, 且 $a\neq\pm b$. 求 $f(x)$.

解. 由

$$af(x)+bf\Big(\frac{1}{x}\Big)=cx,$$
$$af\Big(\frac{1}{x}\Big)+bf(x)=c\frac{1}{x}$$

消去 $f\big(\frac{1}{x}\big)$, 得

$$f(x)=\frac{acx^2-bc}{(a^2-b^2)x}.$$ □

例 8 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足: 对任意的实数 x,y 都有

$$f(x+f(y))=2x+2f(y+1),$$

求 f.

解. 由 $f(0)=f(-f(y)+f(y))=-2f(y)+2f(y+1)$, 得 $2f(y+1)=2f(y)+f(0)$. 特别地, $2f(1)=3f(0)$. 因此

$$f(x+f(y))=2x+2f(y)+f(0)=2(x+f(y))+f(0).$$

对任意实数 t, 记 $x=t-f(0)$, 则

$$f(t)=f(x+f(0))=2(x+f(0))+f(0)=2t+f(0).$$

特别地, $f(1)=2+f(0)$.

由 $3f(0)=2f(1)=2(2+f(0))$, 得 $f(0)=4$. 所以 $f(t)=2t+4$. □

例 9 若函数 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ 满足 $f(1)=2$, 且对任意 $x,y\in\mathbb{Q}$ 都有

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1.$$

求 f.

解. 对任意的 $x\in\mathbb{Q}$, 因

$$f(x)=f(x)f(1)-f(x+1)+1=2f(x)-f(x+1)+1,$$

故 $f(x+1)-f(x)=1$. 所以对任意整数 k 都有 $f(k)=k+1$, 并且 $f(x+k)=f(x)+k$.

因此, 对任意的 $x\in\mathbb{Q}$, 对任意整数 k, 都有

$$f(kx)=f(k)f(x)-f(x+k)+1=(k+1)f(x)-(f(x)+k)+1=kf(x)-k+1.$$

若 $p,q\in\mathbb{Z}$, $q>0$, 则

$$p+1=f(p)=f(q\cdot\frac{p}{q})=qf(\frac{p}{q})-q+1,$$

故 $f(\frac{p}{q})=\frac{p}{q}+1$. 因此对任意的 $x\in\mathbb{Q}$, 都有 $f(x)=x+1$. □

定理1 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 单调, 且对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

则 $f(x)=f(1)x$.

证明. 由 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ 得 $f(0)=0$.

对任意实数 x, 容易用数学归纳法证明: 对任意的正整数 n, 都有 $f(nx)=nf(x)$.

因对任意正整数 m, 都有 $mf(\frac{x}{m})=f(m\cdot\frac{x}{m})=f(x)$, 故 $f(\frac{x}{m})=\frac{1}{m}f(x)$.

对任意正有理数 r, 都存在都是正整数 p,q 使得 $r=\frac{p}{q}$. 因此

$$f(rx)=f(\frac{px}{q})=\frac{1}{q}f(px)=\frac{1}{q}\cdot pf(x)=rf(x).$$

因对任意 $t\in\mathbb{R}$ 都有 $f(t)+f(-t)=f(t+(-t))=f(0)=0$, 故 f 是奇函数. 所以对任意的负有理数 r, 也有 $f(rx)=-f((-r)x)=-(-r)f(x)=rf(x)$.

综上, 对任意有理数 r, 都有 $f(rx)=rf(x)$. 特别地, $f(r)=f(1)r$.

最后, 对任意实数 x, 我们来证: 对任意的 $\varepsilon>0$, 都有 $|f(x)-f(1)x|<\varepsilon$.

记 $\eta=\frac{\varepsilon}{4|f(1)|+1}$. 由 $\mathbb{Q}$ 稠密知, 存在 $r,s\in\mathbb{Q}$ 使得 $x-\eta<r<x<s<x+\eta$. 因 f 单调, 故 $|f(x)-f(r)|\le|f(s)-f(r)|=|f(1)(s-r)|$, 因此,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(1)x|&=|f(x)-f(r)-f(1)(x-r)|\le|f(x)-f(r)|+|f(1)(x-r)|\\&\le|f(1)(s-r)|+|f(1)(s-r)|=2|f(1)|\cdot|s-r|\\&\le 2|f(1)|\cdot 2\eta=2|f(1)|\cdot\frac{2\varepsilon}{4|f(1)|+1}\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

□

问题17 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足: 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 且 f 在某个区间上有界, 是否必有 $f(x)=f(1)x$?

定理 2 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 严格单调, 且对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有

$$f(x+y)=f(x)f(y),$$

则 $f(1)>0$, $f(1)\neq 1$, 且 $f(x)=(f(1))^x$, 即 f 是指数函数.

证明. 我们先证明 $f(x)$ 恒不为零.

事实上, 若存在 $x_0\in\mathbb{R}$, 使得 $f(x_0)=0$, 则对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 都有

$$f(x)=f((x-x_0)+x_0)=f(x-x_0)f(x_0)=0,$$

这就与 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调相矛盾. 所以 $f(x)$ 恒不为零.

因此, 对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2>0$.

最后, 在 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 两端取对数, 得 $\ln f(x+y)=\ln f(x)+\ln f(y)$, 由定理 1 知 $\ln f(x)=x\ln f(1)$, 因此 $f(x)=\mathrm{e}^{x\ln f(1)}=(f(1))^x$. 因 f 严格单调, 故 $f(1)\neq f(2)$. 而 $f(2)=f(1)f(1)$, 因此 $f(1)\neq f(1)f(1)$. 所以 $f(1)\neq 1$. □

定理 3 若 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 严格单调, 且对任意的 $x,y>0$ 都有

$$f(xy)=f(x)+f(y),$$

则 f 是对数函数.

证明. 令 $g(x)=f(e^x)$, 则 g 也严格单调, 且对任意实数 μ,ν, 有

$$g(\mu+\nu)=f(e^{\mu+\nu})=f(e^{\mu}e^{\nu})=f(e^{\mu})+f(e^{\nu})=g(\mu)+g(\nu).$$

由定理 1 知 $g(x)=g(1)x=f(e)x$, 故

$$f(x)=f(e^{\ln x})=g(\ln x)=f(e)\ln x=\log_a x,$$

其中 $a=e^{\frac{1}{f(e)}}$, 且 $a>0$, $a\neq 1$. □

定理 4 若 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 严格单调, 且对任意的 $x,y>0$ 都有

$$f(xy)=f(x)f(y),$$

则 f 是幂函数.

证明. 令 $g(x)=f(e^x)$, 则 g 也严格单调, 且对任意实数 μ,ν, 有

$$g(\mu+\nu)=f(e^{\mu+\nu})=f(e^{\mu}e^{\nu})=f(e^{\mu})f(e^{\nu})=g(\mu)g(\nu).$$

由定理 2 知 $g(x)=(g(1))^x=(f(e))^x$, 即 $f(e^x)=(f(e))^x$. 故

$$f(x)=(f(e))^{\ln x}=(e^{\ln f(e)})^{\ln x}=(e^{\ln x})^{\ln f(e)}=x^{\ln f(e)}.$$

若记 $\alpha=\ln f(e)$, 则 $f(x)=x^{\alpha}$, 即 f 是幂函数. □

例10　设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 单调, 且对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有 $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$. 证明:

$$f(x)=(f(1)-f(0))x+f(0).$$

解. 由 $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}=f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)=f\Big(\dfrac{(x+y)+0}{2}\Big)=\dfrac{f(x+y)+f(0)}{2}$, 得

$$f(x)+f(y)=f(x+y)+f(0),$$

令 $g(x)=f(x)-f(0)$, 则 $g(x+y)=g(x)+g(y)$, 于是 $g(x)=g(1)x$. □

例11　设 n 是大于 1 的正整数, 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 单调, 并且对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$, 都有 $f(x+y^n)=f(x)+(f(y))^n$. 求 f.

解. 由 $f(0)=f(0+0^n)=f(0)+(f(0))^n$ 得 $f(0)=0$. 因此 $f(y^n)=(f(y))^n$. 于是

$$f(x+y^n)=f(x)+f(y^n).$$

所以, 对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$, 若 $y\geq 0$, 则有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

若 $y<0$, 则 $-y>0$, 故 $f(y)+f(-y)=f(y+(-y))=f(0)=0$, 因此 f 是奇函数, 且 $f(x)=f((x+y)+(-y))=f(x+y)+f(-y)=f(x+y)-f(y)$, 故也有

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

所以 $f(x)=f(1)x$. 若 $f(1)\neq 0$, 则由 $f(1)=f(1^n)=(f(1))^n$ 知: 当 n 为偶数时, $f(1)=1$; 当 n 为奇数时, $f(1)=\pm 1$. □

§ 3.5　三角函数

1. 基本公式

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$　　$\Big(1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha},\quad 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\Big)$

2. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$

   $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$　　$\left(\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\right)$

3. $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta.$　　$\Big(\cos 0\neq 0,\ \dfrac{\pi}{2}$ 是 $\cos$ 的最小的正零点$\Big)$

4. $\sin\alpha=\cos\Big(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\Big)$. 并且, 对任意整数 k, 都有

$$\sin\left(\alpha+(2k)\cdot\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\sin\alpha,\quad \sin\left(\alpha+(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\cos\alpha.$$

$$\cos\left(\alpha+(2k)\cdot\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\cos\alpha,\quad \cos\left(\alpha+(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{k+1}\sin\alpha.$$

5. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,\quad \tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

6. $\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\quad \tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$

7. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2},\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2},$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

8. $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\Big),$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\Big),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\Big).$$

9. $\tan\dfrac{\alpha}{2}==\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

2. 证明三角恒等式

例 1 证明恒等式:

(1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha.$

(2) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$

(3) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$

(4) $\cos 3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha.$

(5) $\sin 3\theta=4\sin(60^\circ-\theta)\sin\theta\sin(60^\circ+\theta).$

(6) $\cos 3\theta=4\cos(60^\circ-\theta)\cos\theta\cos(60^\circ+\theta).$

(7) $\tan 3\theta=\tan(60^\circ-\theta)\tan\theta\tan(60^\circ+\theta).$

解. (1) (2) 利用积化和差公式, 倍角公式, 有

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) &= -\frac{1}{2}\Big(\cos((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))-\cos((\alpha+\beta)-(\alpha-\beta))\Big)\\ &= -\frac{1}{2}\Big(\cos 2\alpha-\cos 2\beta\Big)\\ &= -\frac{1}{2}\Big((1-2\sin^2\alpha)-(1-2\sin^2\beta)\Big)\\ &= \sin^2\alpha-\sin^2\beta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) &= \frac{1}{2}\Big(\cos((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))+\cos((\alpha+\beta)-(\alpha-\beta))\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\cos 2\alpha+\cos 2\beta\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big((2\cos^2\alpha-1)+(1-2\sin^2\beta)\Big)\\ &= \cos^2\alpha-\sin^2\beta.\end{aligned}$$

(3) $\sin 3\alpha=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=2(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha.$

(4) $\cos 3\alpha=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha.$

(5) (6) 两次用积化和差公式, 并注意到 $\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}4\sin(60^\circ-\theta)\sin\theta\sin(60^\circ+\theta) &= 4\sin\theta\cdot\frac{1}{2}\Big(\cos 2\theta-\cos 120^\circ\Big)\\ &= 2\sin\theta\cos 2\theta+\sin\theta\\ &= (\sin 3\theta-\sin\theta)+\sin\theta=\sin 3\theta.\\ 4\cos(60^\circ-\theta)\cos\theta\cos(60^\circ+\theta) &= 4\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\Big(\cos 2\theta+\cos 120^\circ\Big)\\ &= 2\cos\theta\cos 2\theta-\cos\theta\\ &= (\cos 3\theta+\cos\theta)-\cos\theta=\cos 3\theta.\end{aligned}$$

□

例 2 设 $\alpha,\beta,\gamma\notin\left\{k\pi+\dfrac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$, 证明: $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ 的充要条件是: 存在 $n\in\mathbb{Z}$ 使得 $\alpha+\beta+\gamma=n\pi$.

解. (必要性) 设 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$, 则

$$\tan\beta+\tan\gamma=-(1-\tan\beta\tan\gamma)\tan\alpha.$$

倘若 $\tan\beta\cdot\tan\gamma=1$, 则 $\tan\beta$ 与 $\tan\gamma$ 同号, 故 $\tan\beta+\tan\gamma\neq 0$, 这就与上式相矛盾. 因此总有 $\tan\beta\cdot\tan\gamma\neq 1$. 于是

$$\tan(\beta+\gamma)=\frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}=-\tan\alpha=\tan(-\alpha).$$

因 tan 的最小正周期为 π, 且 tan 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上严格增, 故存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\beta+\gamma=n\pi-\alpha.$$

(充分性) 设 $\alpha+\beta+\gamma=n\pi$, 其中 $n\in\mathbb{Z}$. 由 $\beta+\gamma=n\pi-\alpha$, 且 $\alpha\notin\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$, 知 $\beta+\gamma\notin\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$. 因此

$$\tan\alpha=-\tan(-\alpha)=-\tan(n\pi-\alpha)=-\tan(\beta+\gamma)=-\frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma},$$

整理即得 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$. □

例 3 设 $\beta\neq 2k\pi$. 证明:

(1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin(\alpha+n\beta)=\dfrac{\sin\frac{n\beta}{2}\sin\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

(2) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos(\alpha+n\beta)=\dfrac{\sin\frac{n\beta}{2}\cos\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

解. 对任意的 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$, 由积化和差公式得

$$2\sin\frac{\beta}{2}\sin(\alpha+k\beta)=\cos\left(\alpha+\left(k-\frac{1}{2}\right)\beta\right)-\cos\left(\alpha+\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta\right),$$
$$2\sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+k\beta)=\sin\left(\alpha+\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta\right)-\sin\left(\alpha+\left(k-\frac{1}{2}\right)\beta\right),$$

分别对 k 求和, 得

$$2\sin\frac{\beta}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin(\alpha+k\beta)=\cos\left(\alpha+\left(1-\frac{1}{2}\right)\beta\right)-\cos\left(\alpha+\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right),$$
$$2\sin\frac{\beta}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(\alpha+k\beta)=\sin\left(\alpha+\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right)-\sin\left(\alpha+\left(1-\frac{1}{2}\right)\beta\right),$$

再对右边用和差化积公式, 得

$$2\sin\frac{\beta}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin(\alpha+k\beta)=2\sin\frac{n\beta}{2}\sin\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\beta\right),$$
$$2\sin\frac{\beta}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(\alpha+k\beta)=2\sin\frac{n\beta}{2}\cos\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\beta\right).$$ □

例 4 证明: $2\sin^4 x+\frac{3}{4}\sin^2 2x+5\cos^4 x-\cos 3x\cos x=2(1+\cos^2 x)$.

解. 先降次再升次,

$$\text{左边}=2\Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)^2+\frac{3}{4}(1-\cos^2 2x)+5\Big(\frac{1+\cos 2x}{2}\Big)^2$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}(2\cos^2 2x-1+\cos 2x)\\
=&3+\cos 2x=2(1+\cos^2 x).
\end{aligned}
$$
□

例5 求证: $\cos^7 x=\frac{1}{64}\cos 7x+\frac{7}{64}\cos 5x+\frac{21}{64}\cos 3x+\frac{35}{64}\cos x.$

解. 由 $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$, 得 $4\cos^3 x=\cos 3x+3\cos x$. 两边平方得

$$
\begin{aligned}
16\cos^6 x=&\cos^2 3x+6\cos 3x\cos x+9\cos^2 x.\\
32\cos^6 x=&(1+\cos 6x)+6(\cos 4x+\cos 2x)+9(1+\cos 2x)\\
=&\cos 6x+6\cos 4x+15\cos 2x+10.\\
64\cos^7 x=&\cos 6x\cos x+12\cos 4x\cos x+30\cos 2x\cos x+20\cos x\\
=&(\cos 7x+\cos 5x)+6(\cos 5x+\cos 3x)\\
&+15(\cos 3x+\cos x)+20\cos x\\
=&\cos 7x+7\cos 5x+21\cos 3x+35\cos x.
\end{aligned}
$$
□

例6 证明: $\tan x+\sec x=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$

解. 用半角公式,

$$
\text{右边}=\tan\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1+\sin x}{\cos x}=\text{左边}.
$$
□

例7 求证: $(1-\sin x)(1-\sin y)=\left(\sin\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)^2$

解. 用倍角公式, 积化和差公式, 有

$$
\begin{aligned}
\text{右边}&=\frac{1}{2}(1-\cos(x+y))+\frac{1}{2}(1+\cos(x-y))-(\sin x+\sin y)\\
&=1-\sin x-\sin y+\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\\
&=1-\sin x-\sin y+\sin x\sin y=\text{左边}.
\end{aligned}
$$
□

例8 求证:

$$
\begin{aligned}
&4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\\
=&\sin(-\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma).
\end{aligned}
$$

解. 分组和差化积,

$$
\text{右边}=(\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma))+(\sin(\beta+\gamma-\alpha)-\sin(\beta+\gamma+\alpha))
$$

$$= 2\sin\alpha\cos(\beta-\gamma) + 2\cos(\beta+\gamma)\sin(-\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha(\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma))$$

$$= 2\sin\alpha(-2\sin\beta\sin(-\gamma)) = \text{左边}. \qquad \square$$

例 9 证明: $\dfrac{\cos x}{1-\sin x} + \dfrac{\cos y}{1-\sin y} = \dfrac{2(\sin x - \sin y)}{\sin(x-y) + \cos x - \cos y}$

解. 由倍角公式得

$$\text{左边} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{\cos^2\frac{y}{2} - \sin^2\frac{y}{2}}{\left(\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{y}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{y}{2}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}}.$$

而

$$\text{右边分子} = 4\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\text{右边分母} = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \qquad \square$$

例 10 证明: $\tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = \cot\alpha$.

解. 由 $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$, 得 $\cot 2\alpha = \dfrac{1}{2}(\cot\alpha - \tan\alpha)$, 即

$$\tan\alpha = \cot\alpha - 2\cot 2\alpha.$$

用 $2\alpha, 4\alpha$ 分别代入上式中的 α, 可得

$$\tan 2\alpha = \cot 2\alpha - 2\cot 4\alpha,$$

$$\tan 4\alpha = \cot 4\alpha - 2\cot 8\alpha.$$

所以

$$\tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha = \cot\alpha - 8\cot 8\alpha. \qquad \square$$

注. 一般地, 有

$$\tan x + 2\tan 2x + 2^2\tan 2^2x + \cdots + 2^n\tan^{2n} x = \cot x - 2^{n+1}\cot 2^{n+1}x.$$

例 11 已知 $\dfrac{\cos^4 A}{\cos^2 B}+\dfrac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=1$, 求证: $\dfrac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\dfrac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=1$.

解. 直接变形就有

$$\cos^4 A\sin^2 B+\sin^4 A\cos^2 B=\sin^2 B\cos^2 B,$$

即

$$(1-\sin^2 A)^2\sin^2 B+\sin^4 A(1-\sin^2 B)-\sin^2 B(1-\sin^2 B)=0,$$

配方得

$$(\sin^2 A-\sin^2 B)^2=0,$$

于是 $\sin^2 A=\sin^2 B$, 进而 $\cos^2 A=\cos^2 B$. □

例 12 已知 $\dfrac{\sin^4 x}{a}+\dfrac{\cos^4 x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$ $(a>0,b>0)$, 证明:

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}.$$

解. 由 Cauchy 不等式,

$$(a+b)\Big(\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\Big)\geq(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=1,$$

得

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\geq\frac{1}{a+b}.$$

因为上式中等号成立, 所以存在 k 使得 $\dfrac{\sin^2 x}{a}=\dfrac{\cos^2 x}{b}=k$. 因 $\dfrac{1}{a+b}=k$, 故

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{k^3\sin^8 x}{\sin^6 x}+\frac{k^3\cos^8 x}{\cos^6 x}=k^3=\frac{1}{(a+b)^3}.$$ □

例 13 已知 $\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\beta\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, 且

$$(3\tan\alpha+\cot\beta)^3+\tan^3\alpha+4\tan\alpha+\cot\beta=0.$$

求证: $4\tan\alpha+\cot\beta=0$.

解. 注意到已知条件等价于

$$(3\tan\alpha+\cot\beta)^3+(3\tan\alpha+\cot\beta)=-(\tan^3\alpha+\tan\alpha).$$

令 $f(x)=x^3+x$, 则由上式即为 $f(3\tan\alpha+\cot\beta)=-f(\tan\alpha)$.

因 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且严格单调增, 于是由

$$f(3\tan\alpha+\cot\beta)=-f(\tan\alpha)=f(-\tan\alpha)$$

得 $3\tan\alpha+\cot\beta=-\tan\alpha$, 即 $4\tan\alpha+\cot\beta=0$. □

例 14 证明 $\dfrac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\dfrac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\cdots+\dfrac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}=\dfrac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$.

解. 由恒等式

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha-\tan\beta$$

知, 对任意的 $k\in\{0,1,\cdots,88\}$ 都有

$$\frac{\sin 1^\circ}{\cos k^\circ\cos(k+1)^\circ}=\tan(k+1)^\circ-\tan k^\circ$$

对 k 求和, 得

$$\frac{\sin 1^\circ}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\cdots+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}.$$

□

例 15 证明: $\sin 1^\circ\sin 2^\circ\sin 3^\circ\cdots\sin 89^\circ=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{45}\cdot 6\sqrt{10}$.

解. 将 $1^\circ,2^\circ,\cdots,89^\circ$, 按 θ, $60^\circ-\theta$, $60^\circ+\theta$ 分组, 并多次应用三倍角公式, 可得

$$\begin{aligned}\text{左边}=&(\sin 1^\circ\sin 59^\circ\sin 61^\circ)(\sin 2^\circ\sin 58^\circ\sin 62^\circ)\cdots\cdot\\&\cdot(\sin 29^\circ\sin 31^\circ\sin 89^\circ)\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 60^\circ\\=&\left(\frac{1}{4}\right)^{30}\cdot\sqrt{3}\sin 3^\circ\sin 6^\circ\sin 9^\circ\cdots\sin 87^\circ\\=&\left(\frac{1}{4}\right)^{30}\cdot\sqrt{3}(\sin 3^\circ\sin 57^\circ\sin 63^\circ)(\sin 6^\circ\sin 54^\circ\sin 66^\circ)\cdots\cdot\\&\cdot(\sin 27^\circ\sin 33^\circ\sin 87^\circ)\cdot\sin 30^\circ\sin 60^\circ\\=&\left(\frac{1}{4}\right)^{40}\cdot 3\sin 9^\circ\sin 18^\circ\sin 27^\circ\sin 36^\circ\sin 45^\circ\sin 54^\circ\sin 63^\circ\sin 72^\circ\sin 81^\circ.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&\sin 9^\circ\sin 18^\circ\cdots\sin 72^\circ\sin 81^\circ\\=&(\sin 9^\circ\cos 9^\circ)(\sin 18^\circ\cos 18^\circ)(\sin 27^\circ\cos 27^\circ)(\sin 36^\circ\cos 36^\circ)\cdot\sin 45^\circ\\=&\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 18^\circ\sin 36^\circ\sin 54^\circ\sin 72^\circ\\=&\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 36^\circ\sin 72^\circ.\end{aligned}$$

设 $x=\sin 36^\circ\sin 72^\circ$, 而 $\cos 36^\circ\cos 72^\circ=\dfrac{1}{4}$, 所以

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{4}=\cos 36^\circ,\\ x-\dfrac{1}{4}=\cos 72^\circ.\end{cases}$$

因此 $x^2-\dfrac{1}{16}=\cos 36^\circ\cos 72^\circ=\dfrac{1}{4}$, 解出 $x=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

□

3. 证明三角恒等式

例 16 已知 $\tan\theta = 2$, 求 $\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta$.

解. 记 $A = \sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta$. 因 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, 故

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} \\ &= \frac{\tan^2\theta + \tan\theta - 2}{\tan^2\theta + 1} \qquad (\text{分子分母同除以 } \cos^2\theta) \\ &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

□

例 17 已知 $\sin(3\pi - \theta) - \cos(5\pi + \theta) = \dfrac{1}{5}$, $\theta \in (0, \pi)$, 求

$$3\sin^2(k\pi - \theta) - 2\sin((k+1)\pi + \theta)\cos((k-1)\pi - \theta) - 2\cos^2(k\pi + \theta)$$

的值, 其中 $k \in \mathbb{Z}$.

解. 记 $A = 3\sin^2(k\pi-\theta) - 2\sin((k+1)\pi+\theta)\cos((k-1)\pi-\theta) - 2\cos^2(k\pi+\theta)$, 则由诱导公式知 $A = 3\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta$. 由题目条件及诱导公式知 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{5}$. 因当 $0 < \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ 时总有 $\sin\theta + \cos\theta \geq 1$, 故 $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$, 进而 $\sin\theta - \cos\theta > 0$. 因

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2,$$

故

$$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2 - (\sin\theta + \cos\theta)^2} = \sqrt{2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{7}{5}.$$

所以 $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$, $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$, 从而 $A = \dfrac{54}{25}$. □

例 18 已知 $f(\cos x) = \cos 17x$, 求 $\big(f(\cos x)\big)^2 + \big(f(\sin x)\big)^2$.

解. 因 $f(\sin x) = f\Big(\cos\Big(\dfrac{\pi}{2} - x\Big)\Big) = \cos 17\Big(\dfrac{\pi}{2} - x\Big) = \sin 17x$, 故

$$\big(f(\cos x)\big)^2 + \big(f(\sin x)\big)^2 = \cos^2 17x + \sin^2 17x = 1.$$

□

例 19 已知 $\sin\alpha - \sin\beta = a$, $\cos\alpha - \cos\beta = b$, 其中 a, b 不全为零. 求 $\cos(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$.

解. 将条件中的两式平方相加, 得 $\cos(\alpha - \beta) = 1 - \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

用第二式平方减去第一式的平方, 可得

$$2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) = b^2 - a^2,$$

因 $a^2 + b^2 \neq 0$, 故 $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$. □

注. 将两式和差化积再相除可求得 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, 再用万能公式也求出 $\cos(\alpha+\beta)$.

例 20 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=p$, $\cos\alpha+\cos\beta=q$, 其中 $pq\neq 0$. 求: $\cos(\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$.

解. 两式平方相加得 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{p^2+q^2}{2}-1$. 由和差化积 (或积化和差) 公式得

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\alpha+\sin\beta=p,$$
$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\alpha+\cos\beta=q,$$

两式相除得 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{p}{q}$. 再由万能公式, 得

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2p/q}{1+p^2/q^2}=\frac{2pq}{p^2+q^2},$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-p^2/q^2}{1+p^2/q^2}=\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2},$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2pq}{q^2-p^2}.$$ □

例 21 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{4}$, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{24}{7}$, 求 $\cos\alpha+\cos\beta$.

解. 由 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{4}$, 得 $2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{1}{4}$.

设 $\cos\alpha+\cos\beta=a$, 则 $2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=a$.

若 $a=0$, 则 $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$, 因此 $\alpha+\beta=2k\pi+\pi$, 进而 $\tan(\alpha+\beta)=0$, 矛盾. 所以 $a\neq 0$, 于是有 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{4a}$. 再由

$$\frac{24}{7}=\tan(\alpha+\beta)=\frac{2\times\left(\dfrac{1}{4a}\right)}{1-\left(\dfrac{1}{4a}\right)^2},$$

得 $a=\dfrac{1}{3}$ 或 $-\dfrac{3}{16}$. □

例 22 已知 $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\dfrac{3}{4}\pi$, $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{12}{13}$, $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$, 求 $\sin 2\alpha$.

解. 因 $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\dfrac{3}{4}\pi$, 故 $0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{4}$, 因此 $\sin(\alpha-\beta)>0$.

因 $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\dfrac{3}{4}\pi$, 故 $\pi<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$, 因此 $\cos(\alpha+\beta)<0$. 所以

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha&=\sin((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))\\&=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\\&=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{12}{13}+\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}\\&=-\frac{56}{65}.\end{aligned}$$ □

例 23 已知 $\sin A+\sin B=\sin C$, $\cos A+\cos B=\cos C$, 求 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$.

解. 将 $\sin A+\sin B=\sin C$, $\cos A+\cos B=\cos C$ 做平方和, 平方差, 得

$$\cos(A-B)=-\frac{1}{2},\quad \cos(A+B)=\cos 2C.$$

因此

$$\begin{aligned}\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C&=\frac{1-\cos^2 A}{2}+\frac{1-\cos^2 B}{2}+\frac{1-\cos^2 C}{2}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\\&=\frac{3}{2}-\cos(A+B)\cos(A-B)-\frac{1}{2}\cos 2C\\&=\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2C-\frac{1}{2}\cos 2C=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$ □

例 24 已知 $\sin x+\sin y+\sin z=\cos x+\cos y+\cos z=0$, 求

$$S=\tan(x+y+z)+\tan x\tan y\tan z.$$

解. 由已知

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=-\sin z,\\ \cos x+\cos y=-\cos z.\end{cases}$$

两式平方相加, 得, $\cos(x-y)=-\frac{1}{2}$. 同理, $\cos(y-z)=-\frac{1}{2}$, $\cos(z-x)=-\frac{1}{2}$. 这表明 x, y, z 中任两角的终边夹角为 $\frac{2}{3}\pi$, 故存在整数 k_1,k_2 使得

$$x=y+\frac{2}{3}\pi+2k_1\pi,\qquad y=z+\frac{2}{3}\pi+2k_2\pi.$$

因此

$$x=z+\frac{4}{3}\pi+2(k_1+k_2)\pi,\qquad x+y+z=3z+2(k_1+2k_2+1)\pi,$$

所以

$$\begin{aligned}S&=\tan 3z+\tan\left(z+\frac{4}{3}\pi\right)\tan\left(z+\frac{2}{3}\pi\right)\tan z\\&=\tan 3z+\tan\left(z+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(z-\frac{\pi}{3}\right)\tan z\\&=\tan 3z-\tan z\tan\left(\frac{\pi}{3}+z\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}-z\right)=0.\end{aligned}$$ □

例 25 若 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{12}$, $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 均有意义, 且 $1+\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta\neq 0$, 求 $\dfrac{1-\tan\alpha-\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta}{1+\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta}$.

解. 由正切的两角和公式, 得

$$\frac{1-\tan\alpha-\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta}{1+\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{(1-\tan\alpha\tan\beta)-\tan\dfrac{\pi}{12}(1-\tan\alpha\tan\beta)}{(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\dfrac{\pi}{12}(1-\tan\alpha\tan\beta)}$$

$$=\frac{1-\tan\dfrac{\pi}{12}}{1+\tan\dfrac{\pi}{12}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}.\qquad\square$$

例26 计算

(1) $\dfrac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}$;

(2) $\tan 15^\circ+\tan 30^\circ+\tan 15^\circ\tan 30^\circ$.

(3) $\dfrac{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$.

(4) $\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$.

(5) $\cos\dfrac{2}{5}\pi+\cos\dfrac{4}{5}\pi$.

(6) $\cos^4 20^\circ+\cos^4 40^\circ+\cos^4 80^\circ$.

(7) $\sin 18^\circ$.

解. 利用公式 $\tan\alpha+\tan\beta=(1-\tan\alpha\tan\beta)\tan(\alpha+\beta)$.

(1) $\dfrac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 75^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 75^\circ}=\tan 120^\circ=\sqrt{3}$.

(2) 因 $\tan 15^\circ+\tan 30^\circ=\tan(15^\circ+30^\circ)(1-\tan 15^\circ\tan 30^\circ)=1-\tan 15^\circ\tan 30^\circ$, 故 $\tan 15^\circ+\tan 30^\circ+\tan 15^\circ\tan 30^\circ=1$.

(3) 因 $2\cos 10^\circ=2\cos(30^\circ-20^\circ)=\sqrt{3}\cos 20^\circ+\sin 20^\circ$, 故 $\dfrac{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}$.

(4) $\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\dfrac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\dfrac{1}{8}$.

(5) 用例3 的方法,

$$\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{4}{5}\pi=\frac{2\sin\dfrac{\pi}{5}\left(\cos\dfrac{2}{5}\pi+\cos\dfrac{4}{5}\pi\right)}{2\sin\dfrac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{5}}\left(\sin\frac{3}{5}\pi-\sin\frac{\pi}{5}+\sin\pi-\sin\frac{3}{5}\pi\right)=-\frac{1}{2}.$$

(6) 先用倍角公式降次,

$$\cos^4\theta=\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4\theta}{2}=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 4\theta,$$

故

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{9}{8}+\frac{1}{2}(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ)+\frac{1}{8}(\cos 80^\circ+\cos 160^\circ+\cos 320^\circ)\\ &= \frac{9}{8}+\frac{5}{8}(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ)\\ &= \frac{9}{8}+\frac{5}{8}(2\cos 60^\circ\cos 20^\circ-\cos 20^\circ)=\frac{9}{8}.\end{aligned}$$

(7) 记 $\alpha=18^\circ$, 则 $\sin 2\alpha=\cos 3\alpha$. 由三倍角公式, $\cos 3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$, 得

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha=\cos 3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha.$$

故 $2\sin\alpha=-3+4\cos^2\alpha=-3+4(1-\sin^2\alpha)=1-4\sin^2\alpha$, 即

$$4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0$$

解出 $\sin 18^\circ=\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. □

4. 三角函数有关的最值和不等式

定理 1 *若 α 为锐角, 则 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha,\quad \sin\alpha+\cos\alpha>1$.*

例 27 证明 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调减, 并由此证明

(1) $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时, $\sin x>\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}x$;

(2) $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时, $\sin x<\sqrt{\dfrac{2x}{\pi}}$.

解. 设 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $x_2-x_1>0$, $0<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\dfrac{\pi}{2}$, 因此

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2) &= \frac{x_2\sin x_1-x_1\sin x_2}{x_1x_2}\\ &= \frac{1}{x_1x_2}\Big((x_2\sin x_1-x_1\sin x_1)+(x_1\sin x_1-x_1\sin x_2)\Big)\\ &= \frac{1}{x_1x_2}\Big((x_2-x_1)\sin x_1-x_1(\sin x_2-\sin x_1)\Big)\\ &= \frac{1}{x_1x_2}\left((x_2-x_1)\sin x_1-2x_1\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right)\\ &> \frac{1}{x_1x_2}\left((x_2-x_1)\sin x_1-x_1(x_2-x_1)\cdot\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right)\\ &= \frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\left(\sin x_1-x_1\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right)\\ &> \frac{x_2-x_1}{x_1x_2}(\sin x_1-x_1\cos x_1)\\ &= \frac{(x_2-x_1)\cos x_1}{x_1x_2}(\tan x_1-x_1)>0.\end{aligned}$$

(1) 由 $f(x) > f\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big)$ 得 $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

(2) 由 $f(x) > f\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big)$, 知 $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$, $x \in \Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$.

令 $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, 则 $t \in \Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$, 于是 $\sin\Big(\dfrac{\pi}{2} - t\Big) > \dfrac{2}{\pi}\Big(\dfrac{\pi}{2} - t\Big)$, 即 $\cos t > 1 - \dfrac{2}{\pi}t$.

这意味着 $\sin^2\dfrac{t}{2} < \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{t}{2}$. 故当 $x \in \Big(0, \dfrac{\pi}{4}\Big)$ 时, $\sin^2 x < \dfrac{2x}{\pi}$, 即 $\sin x < \sqrt{\dfrac{2x}{\pi}}$. □

例 28 已知 $0 < b < 1$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$, 比较

$$x = (\sin\alpha)^{\log_b \sin\alpha}, \quad y = (\cos\alpha)^{\log_b \cos\alpha}, \quad z = (\sin\alpha)^{\log_b \cos\alpha}$$

的大小.

解. 因 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$, 故 $0 < \sin\alpha < \cos\alpha < 1$.

因 $0 < b < 1$, 故 $\log_b \sin\alpha > \log_b \cos\alpha > 0$. 于是

$$(\sin\alpha)^{\log_b \sin\alpha} < (\sin\alpha)^{\log_b \cos\alpha} < (\cos\alpha)^{\log_b \cos\alpha},$$

即 $x < z < y$. □

例 29 求 $f(x) = |\sin x| + \sin^4 2x + |\cos x|$ 的最值.

解. 因 $f\Big(x + \dfrac{\pi}{2}\Big) = f(x)$, $f\Big(\dfrac{\pi}{2} - x\Big) = f(x)$, 故只需求 $f(x)$ 在 $\big[0, \dfrac{\pi}{4}\big]$ 上的最值.

在 $\big[0, \dfrac{\pi}{4}\big]$ 上, $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\big(x + \dfrac{\pi}{4}\big)$ 与 $\sin^4 2x$ 均递增, 所以最大值为 $f\big(\dfrac{\pi}{4}\big)$, 最小值为 $f(0)$.

当且仅当 $x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ 时, 取最大值; $x = \dfrac{k\pi}{2}$ 时, 取最小值. □

例 30 求 $f(x) = \cos 4x + 6\cos 3x + 17\cos 2x + 30\cos x$ 的最小值.

解. 由二倍角公式和三倍角公式得

$$\begin{aligned}
f(x) =& \big(2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1\big) + 6(4\cos^3 x - 3\cos x) \\
& + 17(2\cos^2 x - 1) + 30\cos x \\
=& 8\cos^4 x + 24\cos^3 x + 26\cos^2 x + 12\cos x - 16 \\
=& 2\Big((4\cos^4 x + 4\cos^3 x + \cos^2 x) + (8\cos^3 x + 8\cos^2 x + 2\cos x) \\
& + (4\cos^2 x + 4\cos x + 1)\Big) - 18 \\
=& 2(\cos x + 1)^2(2\cos x + 1)^2 - 18 \geq -18,
\end{aligned}$$

当且仅当 $\cos x=-1$ 或 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 时取等号. □

例 31 已知 $y=\sin x+\sqrt{1+\cos^2 x}$, 求 y 的最大值.

解. 因 $(\sin x)^2+(\sqrt{1+\cos^2 x})^2=2$ 故 $\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\sqrt{2}}\right)^2=1$.

令 $\sin x=\sqrt{2}\cos\theta$, $\sqrt{1+\cos^2 x}=\sqrt{2}\sin\theta$, $\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3}{4}\pi$, 则

$$y=\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).$$

由 $\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3}{4}\pi$, 得 $\dfrac{\pi}{2}\le\theta+\dfrac{\pi}{4}\le\pi$, 因此 $0\le\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1$.

当 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$, 即 $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ 时, $y_{\min}=0$.

当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, 即 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时, $y_{\max}=2$.

解法二. 利用不等式 $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$, 有

$$y=\sin x+\sqrt{1+\cos^2 x}\le\sqrt{2(\sin^2 x+(\sqrt{1+\cos^2 x})^2)}=2,$$

且 $|\sin x|\le 1\le\sqrt{1+\cos^2 x}$, 所以 $0\le\sin x+\sqrt{1+\cos^2 x}\le 2$

当 $\sqrt{1+\cos^2 x}=\sin x$, 即 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时, $y_{\max}=2$.

当 $\sqrt{1+\cos^2 x}=-\sin x$, 即 $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ 时, $y_{\min}=0$. □

例 32 求 $y=\sin x+\sqrt{2+\cos^2 x}$ 的最值.

解. 注意 $y=\sin x+\sqrt{3-\sin^2 x}$.

令$\sin x=\sqrt{3}\cos\theta$, $\theta\in\left[\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3},\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$, 则

$$y=\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{6}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),$$

因 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{4}+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{5}{4}\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ 内单调减, 故

$$y_{\max}=\sqrt{2}+1,\qquad y_{\min}=\sqrt{2}-1.$$ □

例 33 一矩形的一边在 x 轴上, 另两个顶点在 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ $(x>0)$ 的图像上, 求此矩形绕 x 轴旋转而成的几何体的体积 V 的最大值.

解. 因 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, 故可设矩形另两顶点横坐标分别为 x, $\dfrac{1}{x}$. 不妨设 $x<1$, 则

$$V=\pi\cdot\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{x}-x\right)=\pi\cdot\frac{x^2(1-x^2)}{x(1+x^2)^2}$$

$$=\pi\cdot\frac{\frac{1}{x}-x}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}=\pi\cdot\frac{\frac{1}{x}-x}{\left(\frac{1}{x}-x\right)^2+4}.$$

令 $t=\frac{1}{x}-x$, 则 $V=\pi\cdot\frac{t}{t^2+4}=\pi\cdot\frac{1}{t+\frac{4}{t}}\le\frac{\pi}{4}$, 当 $t=2$ 即 $\frac{1}{x}-x=2$, 亦即 $x=\sqrt{2}-1$ 时等号成立.

另解. 在 $V=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 中, 令 $x=\tan t$, 则

$$V=\frac{\pi}{2}\cdot\sin 2t\cdot\cos 2t=\frac{\pi}{4}\sin 4t\le\frac{\pi}{4}.$$ □

例34 求 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域.

解. 设 $x=\tan\theta$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\theta\ne\frac{\pi}{4}$,

$$f(x)=\frac{1/\cos\theta}{\tan\theta-1}=\frac{1}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

设 $u=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$, 则 $-\sqrt{2}<u<1$, 且 $u\ne 0$, 故

$$f(x)=\frac{1}{u}\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(1,+\infty).$$ □

例35 已知 $f(x)=\frac{\sin(\pi x)-\cos(\pi x)+2}{\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{4}\le x\le\frac{5}{4}\right)$, 求 $f(x)$ 的最小值.

解. 易见

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)+2}{\sqrt{x}},\quad \frac{1}{4}\le x\le\frac{5}{4}.$$

设 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\frac{1}{4}\le x\le\frac{5}{4}\right)$. 显然 $g(x)\ge 0$, 并且 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ 上递增, 在 $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$ 上递减, $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{3}{4}$ 对称, 故对任意 $x_1\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$, 存在 $x_2\in\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$, 使 $g(x_2)=g(x_1)$. 于是

$$f(x_1)=\frac{g(x_1)+2}{\sqrt{x_1}}\ge\frac{g(x_2)+2}{\sqrt{x_2}}=f(x_2).$$

而 $f(x)$ 也在 $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$ 上递减, 所以 $f(x)\ge f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{4\sqrt{5}}{5}$, 即 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]$ 上的最小值是 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. □

例36 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha+\beta\ne\frac{\pi}{2}$, 且 $\sin\beta=\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$.

(1) 用 $\tan\alpha$ 表示 $\tan\beta$;

(2) 求 $\tan\beta$ 的最大值.

解. (1) 由 $\sin\beta=\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta-\sin^2\alpha\sin\beta$, 得

$$\sin\beta(1+\sin^2\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta,$$

故

$$\tan\beta=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{2\tan^2\alpha+1}.$$

(2) 令 $x=\tan\alpha$ $(x>0)$, 则 $y=\tan\beta=\dfrac{x}{2x^2+1}$, 即 $2yx^2-x+y=0$. 因此判别式非负, 即 $1-8y^2\geq 0$ 且 $y>0$, 解得 $0<y\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. □

例37 已知 $f(x)=(\sin x+4\sin\theta+4)^2+(\cos x-5\cos\theta)^2$ 的最小值为 $g(\theta)$, 求$g(\theta)$ 的最大值.

解. 方法一. 因

$$\begin{aligned}f(x)&=8(1+\sin\theta)\sin x-10\cos\theta\cos x-9\sin^2\theta+32\sin\theta+42\\&=\sqrt{64(1+\sin\theta)^2+100\cos^2\theta}\sin(x+\psi)-9\sin^2\theta+32\sin\theta+42,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}g(\theta)&=-\sqrt{64(1+\sin\theta)^2+100\cos^2\theta}-9\sin^2\theta+32\sin\theta+42\\&=-2\sqrt{-9\sin^2\theta+32\sin\theta+41}-9\sin^2\theta+32\sin\theta+42.\end{aligned}$$

令 $t=\sqrt{-9\sin^2\theta+32\sin\theta+41}$, 则 $t\in[0,8]$, $g(\theta)=t^2-2t+1=(t-1)^2$, 故

$$g(\theta)_{\max}=(8-1)^2=49.$$

方法二. 在直角坐标系中, 令 $A(\cos x,4+\sin x)$, $B(5\cos\theta,-4\sin\theta)$, 则

$$|AB|^2=(\cos x-5\cos\theta)^2+(\sin x+4\sin\theta+4)^2=f(x).$$

点 A 在圆 $x^2+(y-4)^2=1$ 上运动, 点 B 在椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上运动, 对于椭圆上任一点 B, $g(\theta)$ 为 B 到圆心 $C(0,4)$ 的距离减 1 再平方, 即

$$g(\theta)=\left(\sqrt{(5\cos\theta)^2+(4\sin\theta+4)^2}-1\right)^2.$$

而椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 在圆 $x^2+(y-4)^2=64$ 内, 即 $C(0,4)$ 到椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的距离最大值为 8, 于是 $g(\theta)\leq(8-1)^2=49$, $g(\theta)_{\max}=49$.

当 $x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时 $g(\theta)$ 取得最大值. □

例38 (**前面已有, 此处去掉**) 求 $f(x)=2-2a\cos x-\sin^2 x$ 的最值, 其中 a 为参数.

解. 首先有 $f(x)=\cos^2 x-2a\cos x+1=(\cos x-a)^2+1-a^2$.

令 $t=\cos x$, $f(x)\triangleq g(t)=(t-a)^2+1-a^2$, $t\in[-1,1]$.

(1) $a<-1$ 时, $g(t)$ 在 $[-1,1]$ 上递增, 故 $f(x)$ 的最大值 $M=g(1)=2-2a$, 最小值 $m=g(-1)=2+2a$.

(2) $-1\le a<0$ 时, $g(t)$ 在 $[-1,a]$ 上递减, 在 $[a,1]$ 上递增, 故 $M=g(1)=2-2a$, $m=g(a)=1-a^2$.

(3) $0\le a<1$ 时, $g(t)$ 在 $[-1,a]$ 上递减, 在 $[a,1]$ 上递增, 故 $M=g(-1)=2+2a$, $m=g(a)=1-a^2$.

(4) $a\ge 1$ 时, $g(t)$ 在 $[-1,1]$ 上递减, 故 $M=g(-1)=2+2a$, $m=g(1)=2-2a$.

综上, $f(x)$ 的最大值为

$$M=\begin{cases}2-2a, & a<0,\\ 2+2a, & a\ge 0,\end{cases}$$

最小值为

$$m=\begin{cases}2+2a, & a<-1,\\ 1-a^2, & -1\le a<1,\\ 2-2a, & a\ge 1,\end{cases}$$ □

例 39 若 $\{x\in\mathbb{R}\big|\cos^2 x+\sin x+m=0\}\ne\varnothing$, 求 m 的范围.

解. 问题相当于求

$$m=-\cos^2 x-\sin x=\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

的值域, 因此 m 的范围是 $\left[-\frac{5}{4},1\right]$. □

例 40 已知不等式 $\sqrt{2}(2a+3)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{6}{\sin\theta+\cos\theta}-2\sin 2\theta<3a+6$ 对于 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立, 求 a 的范围.

解. 设 $\sin\theta+\cos\theta=x$, 则 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{x}{\sqrt{2}}$, $\sin 2\theta=x^2-1$, 原不等式即

$$(2x-3)\left(x+\frac{2}{x}-a\right)>0.$$

因 $x\in[1,\sqrt{2}]$, 故 $a>\max\limits_{x\in[1,\sqrt{2}]}\left(x+\frac{2}{x}\right)=3$. □

例 41 已知$f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{5}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}$ $(0<x<\pi)$

(1) 将 $f(x)$ 表示成关于 $\cos x$ 的多项式;

(2) 求 $f(x)$ 的取值范围;

(3) 若 $f(x)=k(\cos x-2)$, 其中 $\cos x$ 有两个不同的符号, 求 k 的取值范围.

解. (1)

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}=\frac{2\cos\frac{3}{2}x\sin x}{\sin\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\\&=4\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=4\cos^2x+2\cos x-\frac{3}{2}\\&=4\Big(\cos x+\frac{1}{4}\Big)^2-\frac{7}{4}.\end{aligned}$$

(2) $f(x)\in\Big[-\frac{7}{4},\frac{9}{2}\Big]$.

(3) $4\cos^2x+2\cos x-\frac{3}{2}=k(\cos x-2)$. 令 $t=\cos x$, $t\in[-1,1]$, 则 $g(t)=4t^2+(2-k)t+2k-\frac{3}{2}$, 由一个根在 $[-1,0)$ 上, 另一个根在 $(0,1]$ 上, 可得

$$\begin{cases}g(-1)\geq 0\\g(0)<0\\g(1)\geq 0\end{cases}\Longrightarrow -\frac{1}{6}\leq k<\frac{3}{4}.$$ □

例 42 设 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, 求使不等式 $\sin^2\theta+3m\cos\theta-6m-4<0$ 恒成立的 m 的范围.

解. 分离变量知应要求 $3m>\dfrac{3+\cos^2\theta}{\cos\theta-2}$ 对任意的 $\theta\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big]$ 恒成立, 所以

$$3m>\max_{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\frac{3+\cos^2\theta}{\cos\theta-2}.$$

令 $\cos\theta-2=t$, 其中 $-2\leq t\leq -1$, 则 $U=\dfrac{3+\cos^2\theta}{\cos\theta-2}=\dfrac{3+(t+3)^2}{t}=t+\dfrac{7}{t}+4$.

当 $t=-2$ 时, 有 $U_{\max}=-2+\Big(-\frac{7}{2}\Big)+4=-\frac{3}{2}$. 所以 $3m>-\frac{3}{2}$, 即 $m>-\frac{1}{2}$. □

例 43 求实数 a 的范围, 使得对任意实数 x 和任意 $\theta\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big]$, 恒有

$$(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geq\frac{1}{8}.$$

解. 方法一. 利用 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geq\dfrac{a+b}{2}$, $a^2+b^2\geq 2\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^2$ 得

$$\begin{aligned}&(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\\=&(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(-x-a\sin\theta-a\cos\theta)^2\\\geq&2\Big(\frac{x+3+2\sin\theta\cos\theta-x-a\sin\theta-a\cos\theta}{2}\Big)^2\\=&\frac{1}{2}(3+2\sin\theta\cos\theta-a\cos\theta-a\sin\theta)^2.\end{aligned}$$

要使 $(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geq\dfrac{1}{8}$ 恒成立, 只需要

$$(3+2\sin\theta\cos\theta-a\cos\theta-a\sin\theta)^2\geq\frac{1}{4},$$

即

$$a\geq\frac{3+2\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}\quad\text{或}\quad a\leq\frac{3+2\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}.$$

令 $t=\sin\theta+\cos\theta$, 则 $t\in[1,\sqrt{2}]$. 因为 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$, 所以

$$a\geq\max_{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\frac{3+2\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}=\max_{t\in[1,\sqrt{2}]}\left(t+\frac{5}{2t}\right)=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2},$$

或

$$a\leq\min_{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\frac{3+2\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}=\min_{t\in[1,\sqrt{2}]}\left(t+\frac{3}{2t}\right)=2\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}.$$

综上, $a\geq\dfrac{7}{2}$ 或 $a\leq\sqrt{6}$. □

方法二. 原不等式对任意实数 x 和任意 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 恒成立

$\Longleftrightarrow$ 点 $P(-3-2\sin\theta\cos\theta,-a\sin\theta-a\cos\theta)$ 与点 $Q(x,x)$ 的距离平方 $\geq\dfrac{1}{8}$

$\Longleftrightarrow$ 点 P 与点 Q 的距离的最小值的平方 $\geq\dfrac{1}{8}$

$\Longleftrightarrow$ 点 P 到直线 $x-y=0$ 的距离的平方 $\geq\dfrac{1}{8}$

$\Longleftrightarrow$ $\left(\dfrac{|-3-2\sin\theta\cos\theta+a\sin\theta+a\cos\theta|}{\sqrt{1+1}}\right)^2\geq\dfrac{1}{8}$. 后面与方法一相同. □

例 44 设 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 求证: $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geq 9$.

解. 由均值不等式, 得

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha\sin^2 2\beta}\geq\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha}\\&=\tan^2\alpha+1+4(\cot^2\alpha+1)=5+\tan^2\alpha+4\cot^2\alpha\geq 9,\end{aligned}$$

当且仅当 $\tan^2\alpha=2$, $\sin^2 2\beta=1$ 时取等号. □

例 45 设 $x\in\mathbb{R}$, $0<x<\pi$, 证明对所有自然数 n, 有

$$\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}>0.$$

解. 记
$$f(x)=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$
利用 $2\sin x\sin(2k-1)x=\cos(2k-2)x-\cos 2kx$, 可得

$$\begin{aligned}
&2f(x)\sin x\\
=&1-\cos 2x+\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3}+\cdots+\frac{\cos(2n-2)x-\cos 2nx}{2n-1}\\
=&1-\left(1-\frac{1}{3}\right)\cos 2x-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cos 4x-\cdots-\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-2)x-\frac{\cos 2nx}{2n-1}\\
\geq&1-\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n-1}=0.
\end{aligned}$$

若等号成立, 则对每个 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 都有 $\cos 2kx=1$.

但因 $0<x<\pi$, 故 $\cos 2x\neq 1$, 于是 $f(x)\sin x>0$, 进而 $f(x)>0$. □

第四章　复数

§ 4.1　复数的概念

定义 1 (**域**) 设 $\mathbb{F}$ 是一个非空集合，$s, p : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的两个二元运算; 对任意的 $x, y \in \mathbb{F}$, 记 $s(x, y) = x + y$, $p(x, y) = x \cdot y$; 分别称 s, p 为加法和乘法; 如果加法和乘法满足下面的九条性质:

(1) 加法结合律: 对任意的 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{F}$, 都有

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3;$$

(2) 存在加法单位元: 存在 $c_0 \in \mathbb{F}$, 使得对任意的 $z \in \mathbb{F}$, 都有

$$z + c_0 = c_0 + z = z;$$

(3) 每个元素都有加法逆元: 对任意的 $z \in \mathbb{F}$, 存在 $w \in \mathbb{F}$, 使得

$$z + w = w + z = c_0;$$

(4) 加法交换律: 对任意的 $z_1, z_2 \in \mathbb{F}$, 都有

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

(5) 乘法结合律: 对任意的 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{F}$, 都有

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3;$$

(6) 存在乘法单位元: 存在 $c_1 \in \mathbb{F}$, 使得对任意的 $z \in \mathbb{F}$, 都有

$$z \cdot c_1 = c_1 \cdot z = z;$$

(7) 每个非零元素有乘法逆元: 对任意的 $z \in \mathbb{F} \setminus \{c_0\}$, 存在 $w \in \mathbb{F}$, 使得

$$z \cdot w = w \cdot z = c_1;$$

(8) 乘法交换律: 对任意的 $z_1, z_2 \in \mathbb{F}$, 都有

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1;$$

(9) 乘法对加法有左、右分配律: 对任意的 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{F}$, 都有

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3; \quad (z_2 + z_3) \cdot z_1 = z_2 \cdot z_1 + z_3 \cdot z_1;$$

则称有序 3-元组 $(\mathbb{F}, +, \ \cdot\ )$ 是一个**域**.

可以证明, 在一个域中, 满足条件 (2) 的 c_0 是唯一的; 满足条件 (6) 的 c_1 也是唯一的; 称 c_0 为域 $\mathbb{F}$ 的**零元**, 称 c_1 为域 $\mathbb{F}$ 的**单位元**. 而且, 若域中至少有两个元素, 那么零元和单位元必定是不同的元素.

还可以证明: 对每个元素 $z \in \mathbb{F}$, 使得 $z + w = w + z = c_0$ 成立的元素 $w \in \mathbb{F}$ 是唯一的, 称 w 为 z 的**加法逆元**, z 的加法逆元记为 $-z$; 对每个元素 $z \in \mathbb{F} \setminus \{c_0\}$, 使得 $z \cdot w = w \cdot z = c_1$ 成立的元素 w 也是唯一的, 称 w 为 z 的**乘法逆元**, z 的乘法逆元记为 z^{-1} 或 $\dfrac{1}{z}$.

在域中可以定义减法和除法作为加法和乘法的逆运算:

减法定义为: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$;

除法定义为: $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$, 其中 $z_2 \neq 0$.

加法、减法、乘法、除法统称为**四则运算**.

例 1 用“ + ”“ · ”分别表示通常的实数的加法和乘法. 根据域的定义, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 是域, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 是域. 若记 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, 则 $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ 也是域. 若设 $\mathbb{F} = \{0, 1\}$, 并在 $\mathbb{F}$ 上规定加法和乘法如下:

$$0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1,\ 1 + 0 = 1,\ 1 + 1 = 0;$$

$$0 \cdot 0 = 0,\ 0 \cdot 1 = 0,\ 1 \cdot 0 = 0,\ 1 \cdot 1 = 1;$$

则 $(\{0, 1\}, +, \ \cdot\ )$ 也是域.

定理 1 考虑全部的实数有序对所构成的集合

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

在集合 $\mathbb{C}$ 上定义加法和乘法运算如下:

$$\text{加法: } (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$\text{乘法: } (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

那么, $(\mathbb{C}, +, \ \cdot\ )$ 是一个域.

证明. 根据 $\mathbb{C}$ 中的加法和乘法的定义, 可以直接验证加法的结合律和交换律, 乘法结合律和交换律, 以及乘法对加法的左、右分配律. 还可以直接验证 $(0,0)$ 是零元, $(1,0)$ 是单位元. 若 $(a,b)\in\mathbb{C}$, 则

$$(-a,-b)+(a,b)=(a,b)+(-a,-b)=(0,0);$$

若 $(a,b)\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 则

$$(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})\cdot(a,b)=(a,b)\cdot(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})=(1,0).$$

故 $\mathbb{C}$ 中每个元素均有加法逆元, 每个非零元的元素均有乘法逆元; 所以 $(\mathbb{C},+,\ \cdot\ )$ 是一个域. □

定义 2 (**复数域**, **复数**) 称 $(\mathbb{C},+,\ \cdot\ )$ 为**复数域**, 其中的元素称为**复数**.

定理 2 考虑 $\mathbb{C}$ 的子集 $\mathbb{E}=\{(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}$. 设

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{E},\ x\mapsto(x,0),$$

则

(1) $\varphi(a_1+a_2)=\varphi(a_1)+\varphi(a_2)$;

(2) $\varphi(a_1\cdot a_2)=\varphi(a_1)\cdot\varphi(a_2)$;

(3) φ 是双射.

这个定理的证明是直接的. 定理的意义在于说明 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 的子集 $\mathbb{E}$ 不但有同样多的元素, 而且从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{E}$ 的双射 φ, 保持了 $\mathbb{R}$ 中的加法运算和 $\mathbb{E}$ 中的加法运算的一致性, 保持了 $\mathbb{R}$ 中的乘法运算和 $\mathbb{E}$ 中的乘法运算的一致性. 非但如此, φ 还把 $\mathbb{R}$ 中的零元和单位元分别映射为 $\mathbb{C}$ 中的零元和单位元. 因此从代数上看, $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{E}$ 是完全相同的. 在这个意义上, 可以把 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{E}$ 看成是一样的, 就是说, $\mathbb{R}$ 不仅可以看成是 $\mathbb{C}$ 的子集, 而且可以看成是 $\mathbb{C}$ 的**子域**.

从现在开始, 就把实数 a 和复数 $(a,0)$ 等同起来看待, 即有 $a=(a,0)$, 特别地, $0=(0,0)$, $1=(1,0)$.

定理 3 (**复数的表示**) 记 $\mathrm{i}=(0,1)$, 则对任意的 $a,b\in\mathbb{R}$, 有

(1) $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=(-1,0)$;

(2) $(a,0)\cdot \mathrm{i}=(0,a)$;

(3) $(a,b)=(a,0)+(b,0)\cdot \mathrm{i}$.

由此以及前面的约定 $a=(a,0)$, $0=(0,0)$, $1=(1,0)$, 就有 $\mathrm{i}^2=-1$, 并把复数 (a,b) 用 $a+b\mathrm{i}$ 来表示. 如果没有特别指出, 以后说 "复数 $a+b\mathrm{i}$", 总是暗指其中的 a,b 都是实数.

任意复数 z 都可唯一地表示为 $a+b\mathrm{i}$ 的形式, 这种表示形式称为复数 z 的**代数式**. 复数的四则运算用下面的代数式来表示, 似乎更合乎我们的习惯:

$$(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i};$$

$$(a_1+b_1\mathrm{i})-(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\mathrm{i};$$

$$(a_1+b_1\mathrm{i})\cdot(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)\mathrm{i};$$

$$\frac{a_1+b_1\mathrm{i}}{a_2+b_2\mathrm{i}}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\mathrm{i}\ (\text{其中 } a_2^2+b_2^2\neq 0\ ).$$

因为 $\mathbb{C}$ 作为域所具有的代数运算规律与实数域上的代数运算规律是一样的, 因此实数域上绝大多数的代数恒等式在复数域上也是成立的, 比如二项式定理. 而每个复数 $a+b\mathrm{i}$ 又可看成复数 a, 复数 b, 复数 i 的代数运算结果, 因此复数的代数运算本质上就是实数 a, b 和 i 的代数运算结果. 这么看来, 复数的四则运算与实数基本上是一样的, 只要把 i 看成是一个参与运算的字母, 并牢记 $\mathrm{i}^2=-1$, 在遇到到 i^2 时, 把它换成 -1 即可.

例2 计算 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3$.

解.
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)^2=\frac{(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^2}{4}=\frac{-2+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3=\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{8}+\frac{-9}{8}+\frac{-3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{8}=-1.$$

□

定义3 称复数 $\mathrm{i}=(0,1)$为**虚数单位**. 对于复数 $z=a+b\mathrm{i}$, 称 a 为 z 的**实部**, 记为 $a=\mathrm{Re}(z)$; 称 b 为 z 的**虚部**, 记为 $b=\mathrm{Im}(z)$. 若 $\mathrm{Im}(z)=0$, 则称 z 为**实数**; 若 $\mathrm{Im}(z)\neq 0$, 则称 z 为**虚数**; 若 $\mathrm{Im}(z)\neq 0$ 且 $\mathrm{Re}(z)=0$, 则称 z 为**纯虚数**.

§ 4.2 复数的性质

从复数集 $\mathbb{C}$ 的定义立即可以看到, $\mathbb{C}$ 中的元素就是平面直角坐标的点的坐标, 因此, 复数集 $\mathbb{C}$ 与坐标平面中的点之间存在着自然的双射: $a+b\,\mathrm{i} \mapsto P(a,b)$. 这个双射意味着每个复数可以确定坐标平面中唯一的一个点, 而坐标平面中的每个点则可以用唯一的一个复数来表示. 我们把这个用复数来表示其中的点的坐标平面称为**复平面**, 同样也用 $\mathbb{C}$ 来表示. 把复平面 Oxy 中的 x 轴称为**实轴**, 把 y 轴称为**虚轴**.

另一方面, 复平面上的点, 都唯一地确定了一个平面向量: $P(a,b) \mapsto \vec{v}$, 其中 $\vec{v}$ 是由以复平面的原点为起点并且以 $P(a,b)$ 为终点的有向线段所确定的平面向量. 从这个意义上说, $a+b\,\mathrm{i} \mapsto \vec{v}$ 也是一个双射, 这是一个从复数域到平面向量空间的双射. 这个双射的有一个明显的好处, 那就是, 复数的加法对应着平面向量的加法; 实数与复数的乘积对应着向量的数乘; 因此可以从代数上 (而不仅仅是从集合上) 把复数域看成平面向量空间, 把复数作为平面向量来看.

定义 1 (共轭和模) 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

(1) 称 $a-b\,\mathrm{i}$ 为 $a+b\,\mathrm{i}$ 的**共轭**, 记为 $\overline{a+b\,\mathrm{i}}$.

(2) 称 $\sqrt{a^2+b^2}$ 为 $a+b\,\mathrm{i}$ 的**模** (或**绝对值**, 或**长度**), 记为 $|a+b\,\mathrm{i}|$.

定理 1 (共轭和模的性质)

(1) 对任意的 $z \in \mathbb{C}$, $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $\quad z-\overline{z} = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.

(2) 对任意的 $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(\overline{z})} = z$, $\quad |z| = |\overline{z}|$, $\quad |z|^2 = z\overline{z}$. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $\ |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

(3) 对任意的 $z \in \mathbb{C}$, z 是实数的充要条件是 $z = \overline{z}$.

(4) 对任意的 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, z 是纯虚数的充要条件是 $z = -\overline{z}$.

(5) 对任意的 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

(6) 对任意的 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 若 $z_2 \neq 0$, 则 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

(7) 对任意的 $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 0$; $\quad$ 并且, $|z| = 0$ 的充要条件是 $z = 0$.

(8) 对任意的 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $\quad \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$.

(9) 对任意的 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; $\quad$ 若 $z_2 \neq 0$, 则 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

证明. 结论 (1), (2), (3), (4), (7) 显然成立. (5) 中的第一个结论也是显然成立的.

设 $z_1 = a + b\,\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\,\mathrm{i}$, 则

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a+b\,\mathrm{i})\cdot(c+d\,\mathrm{i})} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)\,\mathrm{i}}\\ &= (ac-bd)-(ad+bc)\,\mathrm{i} = (a-b\,\mathrm{i})\cdot(c-d\,\mathrm{i})\\ &= \overline{a+b\,\mathrm{i}}\cdot\overline{c+d\,\mathrm{i}} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}.\end{aligned}$$

当 $z_2 \neq 0$ 时, 由 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\cdot\overline{z_2} = \overline{\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2} = \overline{z_1}$, 知 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. 所以结论 (5), (6) 成立. 因为

$$\begin{aligned}|z_1\cdot z_2|^2 &= (z_1\cdot z_2)\overline{z_1\cdot z_2} = (z_1\cdot z_2)(\overline{z_1}\cdot\overline{z_2})\\ &= (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2|z_2|^2 = (|z_1|\cdot|z_2|)^2,\end{aligned}$$

故有 $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$. 若 $z_2 \neq 0$, 则 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|\cdot|z_2| = \left|\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right| = |z_1|$, 故 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. 因此结论 (9) 成立. 最后来证 (8). 因为

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{z_1+z_2} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\ &= z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2} = |z_1|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}+|z_2|^2\\ &= |z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2 \leq |z_1|^2+2|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2\\ &= |z_1|^2+2|z_1|\cdot|\overline{z_2}|+|z_2|^2 = |z_1|^2+2|z_1|\cdot|z_2|+|z_2|^2\\ &= (|z_1|+|z_2|)^2,\end{aligned}$$

故有 $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$. 由 $|z_1| \leq |z_1-z_2|+|z_2|$, 得 $|z_1|-|z_2| \leq |z_1-z_2|$. 交换 z_1, z_2 得 $|z_2|-|z_1| \leq |z_2-z_1| = |z_1-z_2|$. 所以 $\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1-z_2|$. □

问题18 不等式 $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$, $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$, $|z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$, $\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1-z_2|$ 中, 等号成立的充要条件分别是什么?

例1 设复数 α 满足 $|\alpha|<1$, 证明: 对任意的复数 z, 若 $|z|<1$, 则 $\frac{|z-\alpha|}{|1-\overline{\alpha}z|}<1$.

解. 只需证 $|z-\alpha| < |1-\overline{\alpha}z|$, 即 $|z-\alpha|^2 < |1-\overline{\alpha}z|^2$. 事实上,

$$\begin{aligned}|1-\overline{\alpha}z|^2-|z-\alpha|^2 &= (1-\overline{\alpha}z)\overline{(1-\overline{\alpha}z)}-(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}\\ &= (1-\overline{\alpha}z)(1-\alpha\overline{z})-(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})\\ &= (1-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+|\alpha z|^2)-(|z|^2+|\alpha|^2-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z})\\ &= 1-|z|^2-|\alpha|^2+|\alpha|^2|z|^2\end{aligned}$$

$$= (1 - |\alpha|^2)(1 - |z|^2) > 0. \qquad \square$$

定义 2 (**辐角**) 设 z 是非零复数, 它在坐标平面上所确定的点为 P.

(1) z 的**辐角**是指以 x 轴正半轴为始边, 以射线 OP 为终边的有向角 (的大小).

(2) 用 $\mathrm{Arg}z$ 表示 z 的所有的辐角所构成的集合.

(3) 非零复数 z 的满足 $0 \le \theta < 2\pi$ 的辐角称做 z 的辐角的**主值**, 记做 $\arg z$.

注 1. 每个非零复数都有辐角. 但凡说到辐角, 必然是非零复数的辐角.

注 2. 若 θ 是 z 的一个辐角, 则对任意的 $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ 都是 z 的辐角, 因此 z 总有无穷多个辐角.

注 3. z 的任意两个辐角的差必然是 2π 的整数倍, 所以 $\mathrm{Arg}z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

注 4. 对任意非零复数 z, $\arg z$ 是唯一确定的, 并且 $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [0, 2\pi)$ 是满射.

注 5. 规定辐角的主值区间 $[0, 2\pi)$ 不是绝对的, 实际上, 任意指定一个长度为 2π 半开半闭区间作为主值区间都是可以的, 例如 $(-\pi, \pi]$.

为方便计, 对于形如 $\{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ 的集合

$$A = \{\alpha + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{\beta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

我们约定

$$A + B = \{\alpha + \beta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

$$A - B = \{\alpha - \beta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

$$-A = \{-\alpha + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

设 $|z| = r > 0$, θ 是 z 的一个辐角, 则 $\mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$, $\mathrm{Im}(z) = r\sin\theta$, 因此有

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

上式称为 z 的一个**三角式**. 注意复数的三角式不是唯一的, 其中 θ 可以差 2π 的整数倍.

例 2 求 $\arg(1 - 2\mathrm{i})$.

解. 因 $1 - 2\mathrm{i} = \sqrt{5}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{-2}{\sqrt{5}}\mathrm{i}\Big)$, 故 $\arg(1 - 2\mathrm{i}) = -\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi$. $\square$

例 3 设 $z = 1 - \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, 其中 $0 < \alpha < 2\pi$. 求 $|z|$ 和 $\mathrm{Arg}z$.

解. 由 $0<\alpha<2\pi$ 知 $\mathrm{Re}(z)\neq 0$, 故 $z\neq 0$. 由倍角公式得

$$\begin{aligned} z &= 1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\Big(\sin\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\alpha}{2}\Big) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\Big(\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\Big)+\mathrm{i}\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\Big)\Big). \end{aligned}$$

所以 $|z|=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\mathrm{Arg}z=\Big\{\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\Big\}$. □

定理 2 (辐角的性质)

(1) 若 $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则 $\mathrm{Arg}\overline{z}=-\mathrm{Arg}z$.

(2) 若 $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则

$$\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2,\quad \mathrm{Arg}\Big(\frac{z_1}{z_2}\Big)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

(3) (**De Moivre 公式**) 若 $\theta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$, 则

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\,\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\,\sin n\theta.$$

证明. 设 $z_1=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\,\sin\alpha)$, $z_2=s(\cos\beta+\mathrm{i}\,\sin\beta)$, 都是非零复数, 则

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= rs(\cos\alpha+\mathrm{i}\,\sin\alpha)(\cos\beta+\mathrm{i}\,\sin\beta) \\ &= rs((\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+\mathrm{i}\,(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)) \\ &= rs(\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\,\sin(\alpha+\beta)), \end{aligned}$$

故 $\alpha+\beta$ 是 $z_1\cdot z_2$ 的一个辐角, 因此

$$\begin{aligned} \mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2) &= \{\alpha+\beta+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\} \\ &= \{\alpha+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}+\{\beta+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\} \\ &= \mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2). \end{aligned}$$

□

例 4 证明: $\arctan\dfrac{11}{2}=3\arctan\dfrac{1}{2}$.

解. 设 $z=2+\mathrm{i}$, 则 $\arg z=\arctan\dfrac{1}{2}$, $z^3=(2+\mathrm{i})^3=2+11\,\mathrm{i}$, 故 $\arg(z^3)=\arctan\dfrac{11}{2}$. 因

$$\mathrm{Arg}(z^3)=\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(z)=\{3\arctan\frac{1}{2}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\},$$

故存在 $k\in\mathbb{Z}$, 使得 $\arctan\dfrac{11}{2}=3\arctan\dfrac{1}{2}+2k\pi$. 因 $0<3\arctan\dfrac{1}{2}+2k\pi<\dfrac{\pi}{2}$, 故

$$\frac{-3\pi}{2}<-3\arctan\frac{1}{2}<2k\pi<\frac{\pi}{2}-3\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2},$$

因此有 $k=0$. 所以 $\arctan\dfrac{11}{2}=3\arctan\dfrac{1}{2}$. □

例5 证明 (Vieta **恒等式**):

$$\cos(n\theta)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta\sin^{k}\theta\cos\frac{k\pi}{2},$$
$$\sin(n\theta)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta\sin^{k}\theta\sin\frac{k\pi}{2}.$$

解. 根据 De Moivre 公式和二项式定理, 有

$$\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}^k\cos^{n-k}\theta\sin^{k}\theta.$$

因

$$\mathrm{i}^k=(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})^k=\cos\frac{k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2},$$

故

$$\cos n\theta=\mathrm{Re}((\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta\sin^{k}\theta\cos\frac{k\pi}{2},$$
$$\sin n\theta=\mathrm{Im}((\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta\sin^{k}\theta\sin\frac{k\pi}{2}.$$ □

复数也有乘方和的方根概念. 若复数 z,w 满足 $w^n=z$, 则称 z 是 w 的 n 次方, 称 w 是 n 的 n 次**方根**.

定理3 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, 其中 $r>0$, 则 z 的 n 次方根恰有 n 个 (n 为正整数), 它们是

$$w_k=r^{\frac{1}{n}}\Big(\cos\Big(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\Big)\Big),\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

据此定理可看出, 对任意的正整数 n, 任意复数总可以在复数域内开 n 次方, 也就是说, 复数域 $\mathbb{C}$ 对开 n 次方这种运算是封闭的, 而实数域 $\mathbb{R}$ 则不一定是封闭的.

从 n 次方根的表达式可以看出, 当整数 $n\geq 2$ 时, 在复平面上, 这些 w_k 都分布在以原点为中心, 以 $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆周上, 并且它们恰好把圆周 n 等分.

仍用乘法的性质以及 De Moivre 公式, 可以看出

$$w_k=r^{\frac{1}{n}}\Big(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\Big)\cdot\Big(\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\Big)^k,\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

如果令

$$\omega_k=\Big(\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\Big)^k,$$

则 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根可以写成

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\Big(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\Big)\cdot\omega_k,\quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

因这些 $\omega_k\,(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 恰好是 1 的所有的 n 次方根, 我们把它们称作 n 次**单位根**. 除 $\omega_0 = 1$ 之外, 其余的单位根 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}$ 恰好是方程

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$$

的 $n-1$ 个根, 因此多项式 $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1$ 也称为**分圆多项式**.

例 6 若复数 z 满足 $z^3 = 8$, 求 $z^2 + 2z + 3$ 的值.

解. 因 $\left(\dfrac{z}{2}\right)^3 = 1$, 故 $z = 2\omega$ (其中 ω 是 3 次单位根). 所以

$$z^2 + 2z + 3 = (2\omega)^2 + 2(2\omega) + 3 = 4(\omega^2 + \omega + 1) - 1 = -1. \qquad \square$$

例 7 若 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$ 且 $\alpha, \beta \neq 0$, 求 $\Big(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\Big)^{2011} + \Big(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\Big)^{2011}$.

解. 由 $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \dfrac{\alpha}{\beta} + 1 = 0$ 以及 $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \dfrac{\beta}{\alpha} + 1 = 0$, 可知 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 和 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 都满足方程 $z^3 = 1$. 由 $\alpha(\alpha+\beta) = -\beta^2 \neq 0$, 知 $\alpha + \beta \neq 0$. 所以有

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = -\frac{\beta}{\alpha},\quad \frac{\beta}{\alpha+\beta} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

故

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\Big)^{2011} + \Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\Big)^{2011} &= \Big(-\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{2011} + \Big(-\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{2011} \\
&= -\Big(\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{2011} + \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{2011}\Big) \\
&= -\Big(\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{3\times 670+1} + \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{3\times 670+1}\Big) \\
&= -\Big(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\Big) = -\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = 1.
\end{aligned} \qquad \square$$

§ 4.3 复数的几何应用

复平面中的点都是复数. 点 z_1, z_2 之间的距离为 $|z_1 - z_2|$.

设 z_1, z_2, z_3 是复平面中三个 (不同的) 点, 根据三角不等式, 有

$$|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|,\quad |z_1 - z_3| \geq \big||z_1 - z_2| - |z_2 - z_3|\big|.$$

对于 z_1, z_2, z_3 不共线的情形, 上面两个不等号是严格的. 它们所表明的几何意义是: 三角形的两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边.

例1 证明 (平行四边形公式): $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.

解. 直接验证,

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\&=2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2}=2|z_1|^2+2|z_2|^2.\end{aligned}$$ □

从复数的定义就可以知道, 复数的加法与向量相同, 也满足平行四边形法则 (或是三角形法则); 用一个实数去乘一个复数, 则相当于向量的数乘; 因此, 复数加法, 以及用实数去乘复数, 在几何上的意义与向量完全相同.

复数的共轭可以看成是复数的一元运算, 每个复数都可以经过这个共轭运算变成一个新的复数. 这就是说, 每个复数, 作为复平面上的点, 经过共轭运算之后变成一个新的点. 因此, 我们可以把共轭运算 $z\mapsto\overline{z}$ 看成是复平面到复平面的一个双射, 这个映射就是熟知的**反射变换** (或者叫做**直线对称变换**).

类似地, 若 $a\neq0$, 则 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=az+b$ 也是双射, 因此也是复平面上的变换.

但 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 却不是 $\mathbb{C}$ 上的变换. 我们添加一个无穷远点 ∞, 并把 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 称为**扩充复平面** (相当于一个通常的球面). 那么, 对 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 补充定义 $f(0)=\infty$, $f(\infty)=0$ 后, 就可以认为是扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的变换. 例如, 映射 $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}, z\mapsto\dfrac{1}{\overline{z}}$ 所确定的变换就是一个**反演变换**.

从平面向量的角度就可以看出, 对于给定的复数 b, 映射

$$T_b:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z+b$$

是平面上的一个**平移变换** (当 $b=0$ 时是**恒同映射**). 如果 c 是非零实数, 那么映射

$$H_c:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto cz$$

就是平面上的一个**位似变换**, 其位似中心为原点.

由复数运算的性质知, 任意的非零复数 z_1,z_2 的乘积 z_1z_2 的模等于 z_1,z_2 的模的乘积, 乘积 z_1z_2 的辐角等于 z_1,z_2 的辐角之和; 而 z_1,z_2 的商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的模等于 z_1,z_2 的模的商, 商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的辐角等于 z_1,z_2 的辐角之差.

设 $d=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ (其中 $0\leq\theta<2\pi$). 由 $|d\cdot z|=|d|\cdot|z|$, $\mathrm{Arg}(d\cdot z)=\mathrm{Arg}d+\mathrm{Arg}z$

知, 映射

$$R_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto (\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)z$$

是以原点为中心的**旋转变换**, 旋转角为 θ.

设 $a = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)$ (其中 $0 \le \theta < 2\pi$, $r > 0$), 则映射

$$L_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto a\,z$$

满足 $L_a = H_r \circ R_\theta = R_\theta \circ H_r$, 因此 L_a 就是以原点为中心的**旋转位似** (或称**位似旋转**).

综上所述可知, 前面给出的映射 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto az + b$ 就是 L_a 与 T_b 的复合变换 $f = T_b \circ L_a$. 再加上最前面所讨论的关于 x 轴的反射变换 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$, 就能得到中学所学的所有的初等几何变换.

例2 设 A, B 为平面内两个定点, C 为平面内不同于 A, B 的动点, 作正方形 $ACDE$ 和正方形 $CBFG$ (字母都是逆时针方向排列), 证明: 线段 EF 的中点 M 的为平面上的一个定点.

解. 设点 A, B, C, E, F, M 分别表示复数 $z_A, z_B, z_C, z_E, z_F, z_M$, 则

$$z_E = z_A + (z_C - z_A)\,\mathrm{i}, \quad z_F = z_B + (z_C - z_B)(-\,\mathrm{i}).$$

故 $z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} + \dfrac{z_B - z_A}{2}\,\mathrm{i}$, 所以 M 为定点. □

定义1 (**交比**) 设 z_1, z_2, z_3, z_4 是复平面上的四个点, 称

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

为 z_1, z_2, z_3, z_4 的**交比**.

交比是射影几何中的重要概念. 直接验证可知 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto az + b$ 总是保持交比不变的, 即对任意的四个点 z_1, z_2, z_3, z_4, 总有

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)].$$

例3 设 z_1, z_2, z_3, z_4 是复平面上的四个点, 则

(1) z_1, z_2, z_3, z_4 共线 $\iff$ 交比 $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ 和 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ 都是实数.

(2) z_1, z_2, z_3, z_4 共圆 $\iff$ 交比 $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ 为实数且 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ 为虚数.

解. 只证明充分性, 必要性的证明留作习题.

(1) 当交比 $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ 和 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ 都是实数时,

$$\operatorname{Arg}(z_1 - z_3) - \operatorname{Arg}(z_2 - z_3) = \operatorname{Arg}\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

故 $\arg(z_1 - z_3) - \arg(z_2 - z_3) = k\pi$. 而

$$-2\pi < \arg(z_1 - z_3) - \arg(z_2 - z_3) < 2\pi,$$

故 $\arg(z_1 - z_3) - \arg(z_2 - z_3) = \pm\pi$ 或 0, 因此 z_1, z_2, z_3 共线.

当交比 $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ 和 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ 都是实数时, $\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ 也为实数, 因此也有 z_1, z_2, z_4 共线; 所以 z_1, z_2, z_3, z_4 四点共线.

(2) 交比 $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ 为实数且 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ 为虚数时, $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ 也为虚数. 故 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ 和 $\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ 的辐角都不是 $k\pi$. 而

$$\operatorname{Arg}\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \operatorname{Arg}\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}\right) = k\pi.$$

与 (1) 中同样地讨论可知 $\arg\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \arg\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \pm\pi$ 或 0.

若 $\arg\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \arg\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = 0$, 则 z_3, z_4 在 z_1, z_2 所确定的直线的同侧, 且对 z_1, z_2 所张的角相同, 故 z_1, z_2, z_3, z_4 是共圆的.

若 $\arg\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \arg\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \pm\pi$, 则 z_3, z_4 在 z_1, z_2 所确定的直线的异侧, 且对 z_1, z_2 所张的角互补, 故 z_1, z_2, z_3, z_4 也是共圆的. □

复平面上, 直线和圆都可以用**参数方程**给出: 过两点 z_1, z_2 的直线的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1),\ \text{其中参数}\ t \in \mathbb{R}.$$

以 z_0 为圆心以 r 为半径的圆的参数方程为

$$z = z_0 + r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),\ \text{其中参数}\ \theta \in [0, 2\pi).$$

设直线 L 的方程为 $Ax + By + C = 0$, 其中 A, B, C 都是实数, 且 $A^2 + B^2 \neq 0$. 点 $z = x + y\,\mathrm{i}$ 在直线 L 上的充要条件是 z 的实部 x 和虚部 y 满足这个直角坐标方程. 因

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2\,\mathrm{i}},$$

故有 $A\dfrac{z + \overline{z}}{2} + B\dfrac{z - \overline{z}}{2\,\mathrm{i}} + C = 0$, 即

$$\frac{A - \mathrm{i}\,B}{2}z + \frac{A + \mathrm{i}\,B}{2}\overline{z} + C = 0.$$

记 $\alpha = \dfrac{A + \mathrm{i}\,B}{2}$, 则 $\alpha \neq 0$, 并且 z 满足方程 $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + C = 0$.

反过来, 若复数 z 满足方程 $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+C=0$, 则 $\dfrac{A-\mathrm{i}\,B}{2}z+\alpha\dfrac{A+\mathrm{i}\,B}{2}\overline{z}+C=0$, 即

$$A\frac{z+\overline{z}}{2}+B\frac{z-\overline{z}}{2\,\mathrm{i}}+C=0,$$

即

$$Ax+By+C=0.$$

因此满足方程 $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+C=0$ 的点 z 都在直线 $Ax+By+C=0$ 上.

综上所述, 复平面上的直线方程为

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+C=0,\quad \text{其中 } \alpha\neq 0, \text{且 } C\in\mathbb{R}.$$

设圆的直角坐标方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, 其中 $R>0$. 令 $\alpha=-(x_0+\mathrm{i}\,y_0)$, 则 $|z+\alpha|^2=R^2$. 因此, 用 z 表示的圆的方程为

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+C=0,$$

其中 $C\in\mathbb{R}$, 且 $|\alpha|^2>C$.

本节最前面所给出的 $\mathbb{C}$ 上的平移变换 T_b, 位似变换 H_c, 旋转变换 H_θ, 反射变换 F, 以及 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto az+b$, 都把直线变成直线, 把圆变成圆.

在扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上, 映射 $I:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}},\ z\mapsto\dfrac{1}{\overline{z}}$ 是关于单位圆的反演变换. 这个反演变换 I 具有这样的性质: 总是把直线变成直线或圆, 也总是把圆周变成直线或圆. 如果把直线当做半径是无穷大的圆, 则上述结论就是: 反演变换 I 总是把圆变成圆.

下面我们给出一个模型来说明把直线也看成是圆这种想法是完全合理的.

在 $\mathbb{R}^3$ 中, $\mathbb{S}^2=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$ 称为**单位球面**, 称 $\mathbb{S}^2$ 上的点 $N(0,0,1)$ 为北极; 把平面 $\{(x_1,x_2,x_3):x_3=0\}$ 视作复平面 $\mathbb{C}$.

对任意的 $z\in\mathbb{C}$, 过 z 和 N 的直线与 $\mathbb{S}^2$ 有唯一的一个 (不同于 N 的) 交点 $\varphi(z)$. 显然 $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{S}^2\setminus\{N\},\ z\mapsto\varphi(z)$ 是一个双射; 再补充定义 $\varphi(\infty)=N$, 则

$$\varphi:\overline{\mathbb{C}}\to\mathbb{S}^2,\quad z\mapsto\varphi(z)$$

就是一个从扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 到 $\mathbb{S}^2$ 上的双射, 这个映射 φ 称为**球极投射**.

若 L 是 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的一条直线 (约定 ∞ 总是在 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的任一直线上), 则 $\varphi(L)$ 就是 $\mathbb{S}^2$ 中过北极的圆, 这个圆就是过 N 和 L 的平面与 $\mathbb{S}^2$ 的交. 事实上还可以证明, 若 C 是 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的一个圆, 则 $\varphi(C)$ 也是 $\mathbb{S}^2$ 中的圆. 与 $\varphi(L)$ 不同的是 $\varphi(C)$ 不过北极.

综上, 可以把扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 看成球面 $\mathbb{S}^2$, 而把 $\overline{\mathbb{C}}$ 内的直线和圆都统一地看成 $\mathbb{S}^2$ 中的圆, 而扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 内的反演变换 I, 则相当于球面 $\mathbb{S}^2$ 上关于平面 $z_3=0$的反射.

最后, 考虑扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上更一般的 **Möbius 变换** (也叫**分式线性变换**):

$$f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}},\ z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}\quad(\text{其中 } ad-bc\neq 0).$$

可以证明这样的变换一定是保交比的和保圆的.

§ 4.4 复数的代数应用

对于给定的数域 $\mathbb{F}$, 把系数都在数域 $\mathbb{F}$ 中的多项式称为数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式, 并用 $\mathbb{F}[z]$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有的多项式构成的集合. 那么, $\mathbb{F}$ 中的元素与 $\mathbb{F}[z]$ 中的多项式的乘积仍在 $\mathbb{F}[z]$ 中; 并且, $\mathbb{F}[z]$ 中的任意两个多项式的和, 积也仍在 $\mathbb{F}[z]$ 中.

定理1 (**带余除法**) 设 $f(z),g(z)$ 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式, $g(z)$ 不是 0 多项式. 那么, 存在唯一的一对多项式 $q(z),r(z)\in\mathbb{F}[z]$ 使得 $f(z)=q(z)g(z)+r(z)$, 且 $r(z)$ 的次数小于 $g(z)$ 的次数.

证明. 先证存在性. 若存在 $q(z)\in\mathbb{F}[z]$ 使得 $f(z)=q(z)g(z)$, 取 $r(z)=0$ 即可. 若对任意的 $q(z)\in\mathbb{F}[z]$ 都有 $f(z)\neq q(z)g(z)$, 考虑集合

$$E=\{f(z)-\varphi(z)g(z):\varphi(z)\in\mathbb{F}[z]\}.$$

根据最小数原理, E 中必有次数最小的者, 设 $r(z)\in E$ 的次数最小, 则存在 $q(z)\in\mathbb{F}[z]$ 使得 $r(z)=f(z)-q(z)g(z)$. 因此 $f(z)=q(z)g(z)+r(z)$.

下面说明 $r(z)$ 的次数小于 $g(z)$ 的次数. 若不然, 设 $n\geq m$ 且

$$r(z)=a_nz^n+\cdots+a_0,\quad a_n\neq 0,$$

$$g(z)=b_mz^m+\cdots+b_0,\quad b_m\neq 0.$$

则

$$h(z)=r(z)-\frac{a_n}{b_m}z^{n-m}g(z)\in E,$$

且 $h(z)$ 的次数小于 $r(z)$ 的次数, 矛盾. 所以 $r(z)$ 的次数小于 $g(z)$ 的次数, 这说明满足条件的 $q(z),r(z)\in\mathbb{F}[z]$ 是存在的.

再证明唯一性. 设 $q_1(z), q_2(z), r_1(z), r_2(z) \in \mathbb{F}[z]$ 满足

$$f(z) = q_1(z)g(z) + r_1(z) = q_2(z)g(z) + r_2(z),$$

且 $r_1(z), r_2(z)$ 的次数都小于 $g(z)$ 的次数. 因

$$(q_1(z) - q_2(z))g(z) = r_2(z) - r_1(z),$$

比较两边的次数知 $q_1(z) - q_2(z) = 0$, 即 $q_1(z) = q_2(z)$, 进而有 $r_1(z) = r_2(z)$. □

定理 2 (**因式定理**) 设 $f(z)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 次多项式 $(n \geq 1)$, $\alpha \in \mathbb{F}$. 若 α 是 $f(z)$ 的根, 则存在 $n-1$ 次多项式 $g(z) \in \mathbb{F}[z]$, 使得 $f(z) = (z-\alpha)g(z)$.

证明. 由带余除法知, 存在多项式 $g(z), r(z) \in \mathbb{F}[z]$ 使得

$$f(z) = (z-\alpha)g(z) + r(z),$$

且 $r(z)$ 的次数小于 $z-\alpha$ 的次数, 因此 $r(z)$ 为常数. 因

$$r(\alpha) = (\alpha - \alpha)g(\alpha) + r(\alpha) = f(\alpha) = 0,$$

故 $r(z)$ 为 0 多项式, 所以 $f(z) = (z-\alpha)g(z)$. 比较次数可知 $g(z)$ 是 $n-1$ 次多项式. □

下面讨论 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 上的多项式. 首先介绍一个关于多项式的重要定理, 这个定理在代数学中如此之重要, 以至于被称之为代数学基本定理. 第一个得到这个定理的证明的人是Gauss, 在他之前很多人给出过证明, 但那些证明到后来都被发现是错误的. 有意思的是, 这个被称为代数学基本定理的定理, 它的各种不同版本的证明看起来既不是“基本”的, 也不是“代数”的. 我们现在不证明这个定理, 但它在将来的复分析课程里会有一个简短的的证明.

定理 3 (**代数学基本定理**) 次数大于 0 的复系数多项式在 $\mathbb{C}$ 中必有根. [不证]

根据代数学基本定理和因式定理, 用数学归纳法可以证明, 复系数 n 次多项式

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdot + a_1 z + a_0$$

必可分解为 a_n 和 n 个一次因式的乘积, 即

$$f(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n).$$

上式右边的一次因式未必都是不同的. 把相同的因式放在一起, 则 $f(z)$ 可表示为

$$f(z) = a_n(z-\beta_1)^{k_1}(z-\beta_2)^{k_2}\cdots(z-\beta_l)^{k_l},$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l$ 是互异的复数, $k_1, k_2, \cdots, k_l$ 都是正整数, 且 $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$.

对于 $j \in \{1, 2, \cdots, l\}$, 称 $z - \beta_j$ 是 $f(z)$ 的 k_j 重因式, 称 β_j 是 $f(z)$ 的 k_j 重根.

特别地, 当 $k_j = 1$ 时, 通常称 $z - \beta_j$ 是 $f(z)$ 的单因式, 称 β_j 是 $f(z)$ 的单根.

定理4 一元的 n $(n > 0)$ 次复系数多项式在 $\mathbb{C}$ 中恰有 n 个根 (重根按重数计, 即 k 重根算 k 个根). □

引理5 若复数 α 是实系数多项式 $f(z)$ 的根, 则 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(z)$ 的根. □

定理6 (**实系数多项式因式分解定理**) 次数大于 0 的实系数多项式必可以分解为若干个次数不超过 2 的实系数多项式的乘积.

证明. 对多项式的次数 n 用数学归纳法. 当 $n = 1, 2$ 时, 结论显然成立. 当 $n \geq 3$ 时, 假设结论对于 $1, 2, ..., n-1$ 都成立; 下面来证明结论对 n 也成立.

设 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ 是 n 次实系数多项式. 根据代数基本定理, $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中至少有一个根, 设 α 是 $f(z)$ 的根.

若 α 是实数, 根据因式定理, 存在 $n-1$ 次实系数多项式 $g(z)$ 使得 $f(z) = (z-\alpha)g(z)$; 根据归纳假设, $g(z)$ 可分解为次数不超过 2 的实系数多项式的乘积, 因此 $f(z)$ 也可分解为次数不超过 2 的实系数多项式的乘积.

若 α 是虚数, $f(z)$ 仍可在复数域内分解为 $f(z) = (z - \alpha)g(z)$ (这里的 $g(z)$ 是复系数多项式). 由引理知 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(z)$ 的根, 即

$$0 = f(\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha} - \alpha)g(\overline{\alpha}).$$

因 α 是虚数, 故 $\alpha \neq \overline{\alpha}$, 所以 $g(\overline{\alpha}) = 0$, 即 $\overline{\alpha}$ 是 $g(z)$ 的根. 因此存在复系数 $n-2$ 次多项式 $h(z)$ 使得 $g(z) = (z - \overline{\alpha})h(z)$, 所以有

$$f(z) = (z - \alpha)(z - \overline{\alpha})h(z).$$

又因

$$(z - \alpha)(z - \overline{\alpha}) = z^2 - (\alpha + \overline{\alpha})z + \alpha\overline{\alpha} = z^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)z + |\alpha|^2$$

为实系数多项式, 我们断言, $h(z)$ 也必是实系数的多项式.

事实上, 根据 $\mathbb{C}$ 中的带余除法, $f(z) = (z^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)z + |\alpha|^2)h(z) + 0$. 设 $\mathbb{R}$ 中的带余除法为 $f(z) = (z^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)z + |\alpha|^2)h_1(z) + r(z)$, 而后一个式子也能看成是 $\mathbb{C}$ 中的带余除法, 由带余除法的唯一性, 就有 $h(z) = h_1(z)$. 这就说明 $h(z)$ 是实系数的多项式.

既然 $h(z)$ 是实系数的多项式, 且为 $n-2$ 次多项式, 根据归纳假设, $h(z)$ 可分解为次数不超过 2 的实系数多项式的乘积, 因此

$$f(z)=(z^2-2\mathrm{Re}(\alpha)z+|\alpha|^2)h(z)$$

也可分解为次数不超过 2 的实系数多项式的乘积. □

我们把分子和分母都是多项式的分式称为**有理分式**.

由带余除法知, 非零的多项式 $g(z)$ 可以除任意多项式 $f(z)$, 所得的商 $q(z)$ 与余 $r(z)$ 都是唯一确定的. 可以把带余除法中的等式 $f(z)=q(z)g(z)+r(z)$ 改写为分式的形式

$$\frac{f(z)}{g(z)}=q(z)+\frac{r(z)}{g(z)}.$$

上式最后的 $\dfrac{r(z)}{g(z)}$, 其分母次数大于分子次数, 这样的分式称为**真分式**. 因此, 任意的有理分式都可以表示为一个多项式与一个真分式的和.

引理 7 *设 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的真分式, 且存在 $a\in\mathbb{F}$, $k\in\mathbb{N}^*$, 以及 $Q_1(z)\in\mathbb{F}[z]$, 使得 $Q(z)=(z-a)^kQ_1(z)$, $Q_1(a)\neq 0$; 则存在 $A\in\mathbb{F}$ 以及 $P_1(z)\in\mathbb{F}[z]$, 使得*

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A}{(z-a)^k}+\frac{P_1(z)}{(z-a)^{k-1}Q_1(z)},$$

且 $\dfrac{P_1(z)}{(z-a)^{k-1}Q_1(z)}$ 仍为真分式.

证明. 设 $R_1(z)=P(z)-\dfrac{P(a)}{Q_1(a)}\cdot Q_1(z)$, 则 $R_1(a)=0$. 由因式定理, 存在 $P_1(z)\in\mathbb{F}[z]$ 使得 $R_1(z)=(z-a)P_1(z)$. 再设 $A=\dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$, 则

$$P(z)=AQ_1(z)+(z-a)P_1(z),$$

故

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A}{(z-a)^k}+\frac{P_1(z)}{(z-a)^{k-1}Q_1(z)}.$$

再比较 $P_1(z)$ 的和 $(z-a)^{k-1}Q_1(z)$ 的次数可知 $\dfrac{P_1(z)}{(z-a)^{k-1}Q_1(z)}$ 仍为真分式. □

复系数有理分式中, 形如 $\dfrac{A}{(z-a)^k}$ 的真分式称为**部分分式**, 其中 $A,a\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}^*$.

定理 8 (**复数域上的部分分式定理**) *复系数真分式可表为有限个部分分式之和.* □

引理 9 *设 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是实系数真分式, z^2+pz+q, $Q_1(z)\in\mathbb{R}[z]$, 其中 $p^2<4q$, 且 z^2+pz+q 不是 $Q_1(z)$ 的因式. 若存在 $m\in\mathbb{N}^*$ 使得 $Q(z)=(z^2+pz+q)^mQ_1(z)$, 则存*

在 $M,N\in\mathbb{R}$ 以及多项式 $P_1(z)\in\mathbb{R}[z]$, 使得
$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{Mz+N}{(z^2+pz+q)^m}+\frac{P_1(z)}{(z^2+pz+q)^{m-1}Q_1(z)},$$
并且 $\dfrac{P_1(z)}{(z^2+pz+q)^{m-1}Q_1(z)}$ 仍是真分式.

证明. 设 α,β 是 z^2+pz+q 的一对共轭复根, 则 $\mathrm{Im}(\alpha)\neq 0$. 设
$$R(z)=\frac{P(z)}{Q_1(z)},\quad M=\frac{\mathrm{Im}(R(\alpha))}{\mathrm{Im}(\alpha)},\quad N=\frac{\mathrm{Im}(\alpha R(\beta))}{\mathrm{Im}(\alpha)}.$$
因 $R(z)\in\mathbb{R}[z]$, 故 $\overline{R(\alpha)}=R(\beta)$, $\overline{R(\beta)}=R(\alpha)$. 设
$$R_1(z)=P(z)-(Mz+N)Q_1(z),$$
则
$$\begin{aligned}
R_1(\alpha)&=P(\alpha)-(M\alpha+N)Q_1(\alpha)\\
&=P(\alpha)-\frac{\alpha\mathrm{Im}(R(\alpha))+\mathrm{Im}(\alpha R(\beta))}{\mathrm{Im}(\alpha)}Q_1(\alpha)\\
&=P(\alpha)-\frac{\alpha(R(\alpha)-\overline{R(\alpha)})+(\alpha R(\beta)-\overline{\alpha R(\beta)})}{\alpha-\beta}Q_1(\alpha)\\
&=P(\alpha)-\frac{\alpha R(\alpha)-\alpha R(\beta)+\alpha R(\beta)-\beta R(\alpha)}{\alpha-\beta}Q_1(\alpha)\\
&=P(\alpha)-R(\alpha)Q_1(\alpha)=0,\\
R_1(\beta)&=P(\beta)-\frac{\beta\mathrm{Im}(R(\alpha))+\mathrm{Im}(\alpha R(\beta))}{\mathrm{Im}(\alpha)}Q_1(\beta)\\
&=P(\beta)-\frac{\beta(R(\alpha)-\overline{R(\alpha)})+(\alpha R(\beta)-\overline{\alpha R(\beta)})}{\alpha-\beta}Q_1(\beta)\\
&=P(\beta)-\frac{\beta R(\alpha)-\beta R(\beta)+\alpha R(\beta)-\beta R(\alpha)}{\alpha-\beta}Q_1(\beta)\\
&=P(\beta)-\frac{\alpha R(\beta)-\beta R(\beta)}{\alpha-\beta}Q_1(\beta)\\
&=P(\beta)-R(\beta)Q_1(\beta)=0,
\end{aligned}$$
所以, 存在 $P_1(z)\in\mathbb{C}[z]$, 使得 $R_1(z)=(z-\alpha)(z-\beta)P_1(z)$.

因 $R_1(z)\in\mathbb{R}[z]$ 和 $(z-\alpha)(z-\beta)=z^2+pz+q\in\mathbb{R}[z]$, 由带余除法的唯一性, 知 $P_1(z)\in\mathbb{R}[z]$. 由
$$P(z)=(Mz+N)Q_1(z)+R_1(z)=(Mz+N)Q_1(z)+(z^2+pz+q)P_1(z)$$
得
$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{Mz+N}{(z^2+pz+q)^m}+\frac{P_1(z)}{(z^2+pz+q)^{m-1}Q_1(z)}.$$

最后比较次数知 $\dfrac{P_1(z)}{(z^2+pz+q)^{m-1}Q_1(z)}$ 仍是真分式. $\square$

实系数真分式中, 把形如 $\dfrac{A}{(z-a)^k}$ 的分式和形如 $\dfrac{Mz+N}{(z^2+pz+q)^m}$ 的分式都称为**部分分式**, 其中 $A,a,M,N,p,q\in\mathbb{R}$, $k,m\in\mathbb{N}^*$, 且 $p^2-4q<0$.

定理 10 (实数域上的部分分式定理) 实系数真分式可表为有限个部分分式之和.

上面两个定理的表述几乎是一样的, 需要注意的是, 实系数的部分分式定理说的是可以表为实系数的那两种的部分分式之和.

根据实系数多项式因式分解定理, 我们只需再证明下面的引理即可得到实数域上的部分分式定理.

下面我们来讨论一元三次方程和一元四次方程的解法. 首先要说明的是, 一般的 n $(n>1)$ 次方程都可以通过平移消去 $n-1$ 次项, 因此只需考虑缺少次高项的方程.

考虑三次方程

$$x^3=px+q.$$

令 $x=a+b$, 然后设法求出 a 和 b 即可. 因为

$$\begin{aligned}px+q=x^3&=(a+b)^3\\&=a^3+b^3+3ab(a+b)\\&=(a^3+b^3)+(3ab)x,\end{aligned}$$

故设

$$p=3ab,\qquad q=a^3+b^3,$$

这样就知道 a^3 与 b^3 和与积, 进而可解出 a^3 与 b^3 为

$$\frac{q}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{q^2-4(\frac{p}{3})^3}\ 与\ \frac{q}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{q^2-4(\frac{p}{3})^3}.$$

不妨设

$$a^3=\frac{q}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{q^2-4(\frac{p}{3})^3},\quad b^3=\frac{q}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{q^2-4(\frac{p}{3})^3},$$

则

$$x=\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}+\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}},$$

其中 $\omega^3=1$.

当判别式 $\Delta=\dfrac{q^2}{4}-\dfrac{p^3}{27}<0$ 时, 三次方程求根公式中将包含着负数的平方根, 这就是当年令人困惑的虚数.

四次方程的解法属于 Cardano 的学生 Ferrari. 同样只考虑缺次高项的四次方程

$$x^4=px^2+qx+r.$$

解法的关键在于要利用适当的参数把等式的两边配成完全平方形式. 先引入一个待定的值 y, 将左边配方:

$$(x^2+y)^2=(p+2y)x^2+qx+(r+y^2).$$

为使等式右边也是完全平方式, 则要求 y 满足方程

$$q^2=4(p+2y)(r+y^2).$$

这是 y 的三次方程, 故可以解出 y. 最后再把解出的 y 代回方程, 得到两边都是完全平方的等式; 开方后就得到关于 x 的一元二次方程, 从而可以解出 x.

在三次和四次方程的求解问题获得成功之后, 很多人致力于求解一般的更高次的方程, 但无一例外地, 都没有结果. 后来 Abel 指出, 对于 5 次以及高于 5 次的一元高次方程没有通用的代数解法 (即通过各项系数经过有限次四则运算, 乘方, 开方运算给出根的表示). 因此, 很多时候只能退而求其次, 去寻求方程的数值解.

§ 4.5 综合练习

例 1 把下列复数化成三角形式:

(1) $1+\cos\theta+i\sin\theta\ (0\le\theta\le\pi)$;

(2) $\dfrac{1-i\tan\alpha}{1+i\tan\alpha}$;

(3) $1+i\tan\alpha$;

(4) $\dfrac{1-\sin\theta+i\cos\theta}{1-\sin\theta-i\cos\theta}$.

解. (1)

$$\begin{aligned}1+\cos\theta+i\sin\theta&=2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\&=2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+i\ \sin\frac{\theta}{2}).\end{aligned}$$

(2)

$$\frac{1-i\tan\alpha}{1+i\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos\alpha+i\sin\alpha}=\frac{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)}{\cos\alpha+i\sin\alpha}$$
$$=\cos(-2\alpha)+i\sin(-2\alpha).$$

(3)

$$\begin{aligned}1+i\tan\alpha&=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha}\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha), & \alpha\in\big(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\big),\\ -\dfrac{1}{\cos\alpha}\big(\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)\big), & \alpha\in\big(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi\big).\end{cases}\end{aligned}$$

(4)

$$\frac{1-\sin\theta+i\cos\theta}{1-\sin\theta-i\cos\theta}=\frac{1-\cos\big(\frac{\pi}{2}-\theta\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{2}-\theta\big)}{1-\cos\big(\frac{\pi}{2}-\theta\big)-i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$
$$=\frac{2\sin^2\big(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\big)+2i\sin\big(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\big)\cos\big(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\big)}{2\sin^2\big(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\big)-2i\sin\big(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\big)\cos\big(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\big)}$$
$$=\frac{\sin\big(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\big)}{\sin\big(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\big)-i\sin\big(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\big)}$$
$$=\frac{\cos\big(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\big)}{\cos\big(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\big)-i\sin\big(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\big)}$$
$$=\frac{\cos\big(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\big)}{\cos\big(-\big(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\big)\big)+i\sin\big(-\big(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\big)\big)}$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right).$$

□

例 2 求 $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cdots+\cos n\alpha$, $\sin\alpha+\sin2\alpha+\cdots+\sin n\alpha$..

解. 令 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, 那么对任何自然数 k 有 $z^k=\cos k\alpha+i\sin k\alpha$, 于是

$$\begin{aligned}&z+z^2+\cdots+z^n\\=&(\cos\alpha+i\sin\alpha)+(\cos2\alpha+i\sin2\alpha)+\cdots+(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)\\=&(\cos\alpha+\cos2\alpha+\cdots+\cos n\alpha)+i(\sin\alpha+\sin2\alpha+\cdots+\sin n\alpha).\end{aligned}$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
&z+z^2+\cdots+z^n=\frac{z(1-z^n)}{1-z}\\
=&\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)(1-(\cos n\alpha+i\sin n\alpha))}{1-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\\
=&\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)\Big(2\sin^2\dfrac{n\alpha}{2}-2i\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cos\dfrac{n\alpha}{2}\Big)}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-2i\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\\
=&\frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)\Big(\cos\dfrac{n\alpha-\pi}{2}+i\sin\dfrac{n\alpha-\pi}{2}\Big)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\Big(\cos\dfrac{\alpha-\pi}{2}+i\sin\dfrac{\alpha-\pi}{2}\Big)}\\
=&\frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\Big(\cos\Big(\alpha+\frac{n\alpha-\pi}{2}-\frac{\alpha-\pi}{2}\Big)+i\sin\Big(\alpha+\frac{n\alpha-\pi}{2}-\frac{\alpha-\pi}{2}\Big)\Big)\\
=&\frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\Big(\cos\frac{n+1}{2}\alpha+i\sin\frac{n+1}{2}\alpha\Big)\\
=&\frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cos\dfrac{n+1}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}+i\frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},
\end{aligned}
$$

即

$$
z+z^2+\cdots+z^n=\frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cos\dfrac{n+1}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}+i\frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},
$$

所以

$$
\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cos\dfrac{n+1}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},
$$

$$
\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}. \qquad \square
$$

例 3 设$z_1\in\mathbb{C}$，$z_2\in\mathbb{C}$, 证明:

$$
|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\big(|z_1|^2+|z_2|^2\big).
$$

解. 由复数的模的定义知

$$
|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1),
$$

$$
|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+(-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1).
$$

两式相加即可. □

例4 设 z_1, z_2, z_3 是复平面上三个点 A, B, C 对应的复数. 证明三角形 ABC 是等边三角形的充分必要条件是 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

解. (充分性) 设 z_1, z_2, z_3 是三个复数, 且 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

设 $w_1=z_1-z_2$, $w_2=z_2-z_3$, $w_3=z_3-z_1$, 则 w_1,w_2,w_3 都不为零, 且

$$w_1+w_2+w_3=0,\quad {w_1}^2+{w_2}^2+{w_3}^2=0.$$

因此

$${w_1}^2=(w_2+w_3)^2={w_2}^2+{w_3}^2+2w_2w_3=-{w_1}^2+2w_2w_3,$$

即 ${w_1}^2=w_2w_3$, 进而有 ${w_1}^3=w_1w_2w_3$. 同理 ${w_2}^3=w_1w_2w_3$, ${w_3}^3=w_1w_2w_3$.

所以 ${w_1}^3={w_2}^3={w_3}^3$, 于是 $|w_1|=|w_2|=|w_3|$. □

(必要性) 设 z_1, z_2, z_3 是复平面上三个点 A, B, C 对应的复数, 且三角形 ABC 是等边三角形, 则存在 3 次单位根 ω 使得

$$z_1-z_2=\omega(z_3-z_1),\quad z_2-z_3=\omega(z_1-z_2),\quad z_3-z_1=\omega(z_2-z_3).$$

三式平方相加, 得

$$(z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2+(z_3-z_1)^2=\omega^2((z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2+(z_3-z_1)^2).$$

因 $\omega^2\neq 1$, 故 $(z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2+(z_3-z_1)^2=0$, 即

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1.$$ □

例5 若复数 $z_1\neq z_2$, $|z_1|=\sqrt{2}$, 求 $\left|\dfrac{z_1-\overline{z}_2}{2-z_1z_2}\right|$.

解. 由 $|z_1|^2=2$, 得

$$\begin{aligned}\left|\frac{z_1-\overline{z}_2}{2-z_1z_2}\right|&=\left|\frac{z_1-\overline{z}_2}{z_1\overline{z}_1-z_1z_2}\right|=\frac{|z_1-\overline{z}_2|}{|z_1|\cdot|\overline{z}_1-z_2|}\\&=\frac{|z_1-\overline{z}_2|}{|z_1|\cdot|z_1-\overline{z}_2|}=\frac{1}{|z_1|}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$ □

例6 若 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r\neq 0$, 求 $\left|\dfrac{{z_1}^{-1}+{z_2}^{-1}+{z_3}^{-1}}{z_1+z_2+z_3}\right|$.

解. 因 ${z_k}^{-1}=\dfrac{\overline{z}_k}{r^2}$, 故

$$\left|\frac{{z_1}^{-1}+{z_2}^{-1}+{z_3}^{-1}}{z_1+z_2+z_3}\right|=\frac{1}{r^2}\left|\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_2+\overline{z}_3}{z_1+z_2+z_3}\right|=\frac{1}{r^2}.$$ □

例 7 设复数 z 满足 $|z|=1$, 求 $|z^2-z+1|$ 的范围.

解. 由 $|z|=1$ 知 $z\overline{z}=1$, 故

$$|z^2-z+1|=|z^2-z+z\overline{z}|=|z|\cdot|z+\overline{z}-1|=|z+\overline{z}-1|.$$

设 $z=x+iy$, 则 $x^2+y^2=1$, 因此 $|x|\le 1$. 由三角不等式得

$$|z^2-z+1|=|2x-1|\le|2x|+1\le 3.$$

当 $x=-1$ 时, $|2x-1|=3$. 又 $|2x-1|\ge 0$, 且 $x=\dfrac{1}{2}$ 时, $|2x-1|=0$.

所以 $|z^2-z+1|$ 的范围是 $[0,3]$. □

例 8 设 z 为虚数, $w=z+\dfrac{1}{z}$ 为实数, 且 $-1<w<2$.

(1) 求 $|z|$ 及 z 的实部的取值范围;

(2) 证明 $\mu=\dfrac{1-z}{1+z}$ 为纯虚数.

解. (1) 设 $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$, 则

$$\begin{aligned} w&=a+ib+\frac{1}{a+ib}\\ &=a+ib+\frac{a-ib}{a^2+b^2}\\ &=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i. \end{aligned}$$

因 w 为实数, 故 $b-\dfrac{b}{a^2+b^2}=0$. 因 z 为虚数, 故 $b\ne 0$. 于是 $a^2+b^2=1$, 即 $|z|=1$.

由 $w=2a$, 且 $-1<w<2$, 得 $-\dfrac{1}{2}<a<1$. □

(2) 注意到 (1) 中已证明的 $|z|=1$. 因 z 是虚数, 故 $z-\overline{z}\ne 0$. 因此有

$$\begin{aligned} \mu+\overline{\mu}&=\frac{1-z}{1+z}+\overline{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)}\\ &=\frac{1-z}{1+z}+\frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}}\\ &=\frac{(1-z)(1+\bar{z})+(1+z)(1-\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z})}\\ &=\frac{2-2z\bar{z}}{(1+z)(1+\bar{z})}=0,\\ \mu-\overline{\mu}&=\frac{1-z}{1+z}-\overline{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)}\\ &=\frac{1-z}{1+z}-\frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}}\\ &=\frac{(1-z)(1+\bar{z})-(1+z)(1-\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z})} \end{aligned}$$

$$= \frac{-2(z-\overline{z})}{(1+z)(1+\overline{z})} \neq 0.$$

得 $\mathrm{Re}(\mu)=0$, $\mathrm{Im}(\mu)\neq 0$. 所以 μ 是纯虚数. □

例9 设 a 是负实数, 复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=|z_1+z_2|$, $\overline{z_1}\,z_2=a\big(1+\sqrt{3}i\big)$. 求 $\dfrac{z_2}{z_1}$.

解. 由 $|z_1|=|z_1+z_2|$, 得

$$|z_1|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=|z_1|^2+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+|z_2|^2,$$

故

$$|z_2|^2=-(z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2})=-2\mathrm{Re}(\overline{z_1}\,z_2)=-2a,$$

因此

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\cdot\overline{z}_2}{z_1\cdot\overline{z}_2}=\frac{-2a}{a\big(1-\sqrt{3}i\big)}=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}.$$ □

例10 设 $z_1,z_2,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$, 且满足 $\sum\limits_{j=1}^{n}|z_j|=1$, 证明: 上述 n 个复数中, 必存在若干个复数, 它们的和的模不小于 $\dfrac{1}{6}$.

解. 设 $z_j=a_j+ib_j$, $j=1,2,\cdots,n$. 因为 $\sum\limits_{j=1}^{n}|z_j|=1$, 所以

$$\begin{aligned}1&\le\sum_{j=1}^{n}|a_j|+\sum_{j=1}^{n}|b_j|\\&=\sum_{a_j<0}|a_j|+\sum_{a_j>0}|a_j|+\sum_{b_j<0}|b_j|+\sum_{b_j>0}|b_j|,\end{aligned}$$

不妨设 $\sum\limits_{b_j>0}|b_j|\ge\dfrac{1}{4}$, 则

$$\Big|\sum_{b_j>0}z_j\Big|\ge\Big|\sum_{b_j>0}b_j\Big|=\sum_{b_j>0}|b_j|\ge\frac{1}{4}>\frac{1}{6}.$$ □

例11 已知 x, y 满足 $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\dfrac{x}{y}+1=0$, 求 $\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^{2010}+\left(\dfrac{y}{x+y}\right)^{2010}$ 的值.

解. 设 $\dfrac{x}{y}=\omega$, 则 $\omega+1=-\omega^2$, $\omega^3=1$. 因

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+y}&=\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1}=\frac{\omega}{\omega+1}=\frac{\omega}{-\omega^2}=-\omega^2,\\\frac{y}{x+y}&=\frac{1}{\frac{x}{y}+1}=\frac{1}{\omega+1}=\frac{1}{-\omega^2}=-\omega,\end{aligned}$$

故

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2010}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{2010}=(-\omega^2)^{2010}+(-\omega)^{2010}=1+1=2.$$ □

例 12 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=|z_1+z_2|=3$, $|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$, 求

$$(z_1\overline{z}_2)^{2000}+(\overline{z}_1z_2)^{2000}.$$

解. 由

$$9=|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2,$$

$$27=|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2,$$

得 $|z_1|^2+|z_2|^2=18$. 因 $|z_1|^2=9$, 故 $|z_2|=3$, 且 $z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=-9$.

因 $\left|z_1\overline{z}_2\right|=\left|z_1\right|\cdot\left|\overline{z_2}\right|=9$, 故可设 $z_1\overline{z}_2=9(\cos\theta+i\sin\theta)$, 则

$$\overline{z}_1z_2=9(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)).$$

由 $z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=-9$ 得 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$, 故 $z_1\overline{z}_2=9\omega$, 其中 $\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^3=1$. 于是

$$\begin{aligned}(z_1\overline{z}_2)^{2000}+(\overline{z}_1z_2)^{2000}&=(9\omega)^{2000}+(9\omega^2)^{2000}\\&=9^{2000}\left(\omega^{2000}+\omega^{4000}\right)=-9^{2000}.\end{aligned}$$ □

例 13 若实数 x, y 满足 $z_1=x+\sqrt{3}+iy$, $z_2=x-\sqrt{3}+iy$, $|z_1|+|z_2|=4$, 求 $f(x,y)=|2x-4y+9|$ 的最值.

解. 令 $z=x+iy$, 则

$$\left|z+\sqrt{3}\right|+\left|z-\sqrt{3}\right|=4,$$

即 z 在以 $\left(\pm\sqrt{3},0\right)$ 为焦点, 2 为长半轴长的椭圆上, 其方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$,

令

$$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=\sin\theta,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}f(x,y)&=|4\cos\theta-4\sin\theta-9|\\&=\left|4\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-9\right|.\end{aligned}$$

因此, 当 $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ 时, $f(x,y)_{\min}=9-4\sqrt{2}$; 当 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ 时, $f(x,y)_{\max}=9+4\sqrt{2}$. □

例 14 若复数 $z_1=2-\sqrt{3}a+ai$, $z_2=\sqrt{3}b-1+\left(\sqrt{3}-b\right)i$, 且它们的模相等, $\overline{z}_1z_2$ 的辐角主值为 $\dfrac{\pi}{2}$, 求实数 a, b.

解. 由已知条件得 $z_1 \neq 0$, $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = 1$. 因 $\overline{z}_1 z_2 = |z_1|^2 \cdot \dfrac{z_2}{z_1}$, 故

$$\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \arg(\overline{z}_1 z_2) = \frac{\pi}{2},$$

于是 $\dfrac{z_2}{z_1} = i$, 即 $z_2 = z_1 i$, 因此

$$\sqrt{3}b - 1 + \left(\sqrt{3} - b\right)i = \left(2 - \sqrt{3}a + ai\right)i = -a + \left(2 - \sqrt{3}a\right)i.$$

比较两边实部, 虚部, 解出 $a = b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. □

例 15 设复数 $z = 3\cos\theta + i\sin\theta$, 求 $y = \tan(\theta - \arg z)$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最大值及相应的 θ.

解. 因 $z = 3\cos\theta + i\sin\theta$, 故

$$\tan(\arg z) = \frac{\sin\theta}{3\cos\theta} = \frac{1}{3}\tan\theta.$$

因此,

$$\begin{aligned} y = \tan(\theta - \arg z) &= \frac{\tan\theta - \dfrac{1}{3}\tan\theta}{1 + \dfrac{1}{3}\tan^2\theta} \\ &= \frac{2}{\dfrac{3}{\tan\theta} + \tan\theta} \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

当且仅当 $\dfrac{3}{\tan\theta} = \tan\theta$, 即 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 时, $y_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. □

例 16 设 $0 < \theta < 2\pi$, 复数 $z = 1 - \cos\theta + i\sin\theta$, $u = a^2 + ai$, 且 zu 是纯虚数, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 求复数 u 的辐角主值 (用 θ 表示);

(2) 记 $w = z^2 + u^2 + 2zu$, 试问 w 可能是正实数吗?

解. (1) 因 zu 为纯虚数, 故 $\theta \neq \pi$, 且

$$zu = \left(a^2(1 - \cos\theta) - a\sin\theta\right) + \left(a^2\sin\theta + a(1 - \cos\theta)\right)i,$$

故

$$\begin{cases} a^2(1 - \cos\theta) = a\sin\theta, \\ a^2\sin\theta + a(1 - \cos\theta) \neq 0. \end{cases}$$

由第二个等式知 $a \neq 0$. 因 $0 < \theta < 2\pi$, 故 $1 - \cos\theta \neq 0$, 由第一个等式知

$$a = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \cot\frac{\theta}{2},$$

故 $\tan(\arg u) = \dfrac{a}{a^2} = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

(i) 若 $0<\theta<\pi$, 则 $u=\cot^2\dfrac{\theta}{2}+i\cot\dfrac{\theta}{2}$ 在第一象限, $\arg u=\dfrac{\theta}{2}$.

(ii) 若 $\pi<\theta<2\pi$, 则 u 在第四象限, $\arg u=\pi+\dfrac{\theta}{2}$.

(2) 首先 $w=z^2+u^2+2zu=(z+u)^2$, 且 $z+u=(1-\cos\theta+a^2)+(a+\sin\theta)i$.

若 $w\in\mathbb{R}^+$, 则 $a+\sin\theta=0$, 即 $a=-\sin\theta$. 又因 $a=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$, 故 $a=\dfrac{-a}{1-\cos\theta}$.

由 $a\neq 0$, 得 $\cos\theta=2$, 矛盾. □

例 17 若复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=2$, $|z_2|=3$, $3z_1-2z_2=\dfrac{3}{2}-i$, 求 $z_1 z_2$.

解. 令 $z_1=2(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $z_2=3(\cos\beta+i\sin\beta)$, 则由 $3z_1-2z_2=\dfrac{3}{2}-i$, 得

$$6(\cos\alpha-\cos\beta)=\frac{3}{2},\quad 6(\sin\alpha-\sin\beta)=-1,$$

即

$$-12\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{3}{2},\quad 12\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=-1,$$

因此 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{3}{2}$. 由万能公式得

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{12}{13},\qquad \cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13},$$

故

$$z_1z_2=6(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))=-\frac{30}{13}+\frac{72}{13}i.$$ □

例 18 已知复数 $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$, $w=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, 复数 $\overline{zw}$, z^2w^3 对应的复数平面上的点分别为 P, Q, 证明: $\triangle POQ$ 是等腰直角三角形.

解. 因 $z=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $w=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$, 故

$$\begin{aligned} zw&=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12},\\ \overline{zw}&=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right),\\ z^2w^3&=\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi. \end{aligned}$$

因此, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角为 $\dfrac{5\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. 因 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$, 且 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{Ow}|$, 故 $\triangle POQ$ 是等腰直角三角形. □

例 19 设 M 是单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上的动点, 点 N 与定点 $A(2,0)$ 和点 M 构成一个等边三角形的顶点, 并且 $M\to N\to A\to M$ 成逆时针方向. 当 M 点移动时, 求点 N 的轨迹.

解. 设 M, N 对应的复数依次为 $x'+y'i$, $x+yi$, 那么向量 AM 可以用向量 AN 绕 A 点逆时针旋转 $300°$ 得到, 用复数运算来实现这个变换就是

$$\overrightarrow{AM}=(\cos 300°+i\sin 300°)\cdot\overrightarrow{AN},$$
$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(\cos 300°+i\sin 300°)\cdot\left(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}\right),$$

即

$$\begin{aligned} x'+y'i-2&=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}(x+yi-2)\\ &=\frac{x+\sqrt{3}y-2}{2}+\frac{y-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}{2}i, \end{aligned}$$

所以

$$x'=\frac{x+\sqrt{3}y+2}{2},\qquad y'=\frac{y-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}{2}.$$

但 $x'^2+y'^2=1$, 故

$$\left(\frac{x+\sqrt{3}y+2}{2}\right)^2+\left(\frac{y-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}{2}\right)^2=1.$$

整理得 $x^2+y^2-2x+2\sqrt{3}y+3=0$, 或 $(x-1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=1$. □

第五章　不等式和最值

§ 5.1　不等式的基本性质

例 1　设 $0 < a \leq b$, 比较 $\sqrt{a+b}-\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{b}-\sqrt{b-a}$ 的大小.

解. 由 $\sqrt{a+b}+\sqrt{b} > \sqrt{b}+\sqrt{b-a}$, 知

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b}-\sqrt{b} &= \frac{a}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}} \\ &< \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{b-a}} \\ &= \sqrt{b}-\sqrt{b-a}.\end{aligned}$$

□

例 2　设 a, b, x, y 都是实数, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$, 比较 a^2+b^2 与 $(x+y)^2$ 的大小.

解. 由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$, 得

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &\geq (a^2+b^2)\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) \\ &= x^2+y^2+\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{a^2y^2}{b^2} \\ &= (x+y)^2-2xy+\left(\frac{bx}{a}-\frac{ay}{b}\right)^2+2xy \\ &= (x+y)^2+\left(\frac{bx}{a}-\frac{ay}{b}\right)^2 \\ &\geq (x+y)^2,\end{aligned}$$

故当 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 且 $\dfrac{bx}{a}-\dfrac{ay}{b}=0$ 时, 有 $a^2+b^2=(x+y)^2$; 否则 $a^2+b^2>(x+y)^2$.　□

例 3　设 a, b, c 是互异的正数,

(1) 比较 $a^a b^b$ 与 $a^b b^a$ 的大小;

(2) 比较 $a^a b^b c^c$ 与 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$ 的大小.

解. (1) 因 a, b 是互异的正数, 故 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$, 因此 $a^a b^b > a^b b^a$.

(2) 利用 (1) 的结论, 有 $a^a b^b c^c > a^b b^a c^c$, $b^b c^c a^a > b^c c^b a^a$, $c^c a^a b^b > c^a a^c b^b$, 三式相乘即得结论. □

例4 已知 $x > 0$, $x \neq 1$, $m > n > 0$, 判断 $x^m + \dfrac{1}{x^m}$ 与 $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ 的大小.

解. 由 $m+n>0$, $m-n>0$, 知

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = \frac{(x^{m-n}-1)(x^{m+n}-1)}{x^m} > 0,$$

故 $x^m + \dfrac{1}{x^m} > x^n + \dfrac{1}{x^n}$. □

例5 设 $3^a + 13^b = 17^a$, $5^a + 7^b = 11^b$, 比较实数 a, b 的大小.

解. 分情况讨论.

(i) 若 $a \geq 1$, 则

$$\frac{3^a + 13^b}{17^a} = 1 > \frac{3}{17} + \frac{13}{17} \geq \left(\frac{3}{17}\right)^a + \left(\frac{13}{17}\right)^a = \frac{3^a + 13^a}{17^a},$$

故 $13^b > 13^a$, 因此有 $a < b$.

(ii) 若 $b \leq 1$, 则

$$\frac{5^a + 7^b}{11^b} = 1 < \frac{5}{11} + \frac{7}{11} \leq \left(\frac{5}{11}\right)^b + \left(\frac{7}{11}\right)^b = \frac{5^b + 7^b}{11^b},$$

故 $5^a < 5^b$, 因此也有 $a < b$. 综上可知 $a < b$. □

例6 设 a, b 是正数, 证明 $\sqrt{\dfrac{a}{a+3b}} + \sqrt{\dfrac{b}{b+3a}} \geq 1$.

解. 记 $\dfrac{b}{a} = t$, 则 $t > 0$, 要证的不等式变为

$$\sqrt{\frac{1}{1+3t}} + \sqrt{\frac{t}{t+3}} \geq 1,$$

再经过变形后成为 $3t(t^2 - 2t + 1) \geq 0$, 而这是显然的. □

例7 设 $x, y \in \mathbb{R}$, M 为 $x^2 + xy + y^2$, $x^2 + x(y-1) + (y-1)^2$, $(x-1)^2 + (x-1)y + y^2$, $(x-1)^2 + (x-1)(y-1) + (y-1)^2$ 这四个数中最大的数. 求 M 的最小值.

解. 记这四个数依次为 A, B, C, D, 则

$$(A+D) - (B+C) = (xy + (x-1)(y-1)) - (x(y-1) + (x-1)y) = 1,$$

所以

$$\begin{aligned} 2M &\geq A + D \\ &= (x^2 + xy + y^2) + ((x-1)^2 + (x-1)(y-1) + (y-1)^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 3(x+y) + 3 \\
&= \frac{3}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2 - 3(x+y) + 3 \\
&= \frac{3}{2}(x+y-1)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

当且仅当 $x = y = \dfrac{1}{2}$ 时上式中的最后一个不等号为等号, 此时 $A = \dfrac{3}{4}$, $B = \dfrac{1}{4}$, $C = -\dfrac{1}{4}$, $D = \dfrac{3}{4}$. 所以 M 的最小值为 $\dfrac{3}{4}$. □

问题 19 当 a, b, c 满足什么条件时, 一定会存在 λ, μ, 使得

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \lambda(x+y)^2 + \mu(x-y)^2 \ ?$$

例 8 已知实数 x, y 满足 $(x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) \geq 1$, 求 $x + y$ 的最小值.

解. 令 $f(t) = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$, 则 f 为奇函数. 因 f 在 $[0, +\infty)$ 严格单调增, 故 f 在 $\mathbb{R}$ 上也严格单调增. 由此知 $g(t) = t + \sqrt{t^2+1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调增. 由

$$g(x) = x + \sqrt{x^2+1} \geq \frac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} = (-y) + \sqrt{(-y)^2+1} = g(-y),$$

知 $x \geq -y$, 所以 $x + y \geq 0$. □

例 9 设正数 a, b, c 满足不等式组

$$
\begin{cases}
\dfrac{11}{6}c < a + b < 2c, \\
\dfrac{3}{2}a < b + c < \dfrac{5}{3}a, \\
\dfrac{5}{2}b < c + a < \dfrac{11}{4}b.
\end{cases}
$$

请确定 a, b, c 的大小关系.

解. 由已知的不等式组得

$$
\begin{cases}
\dfrac{17}{6}c < a + b + c < 3c, \\
\dfrac{5}{2}a < a + b + c < \dfrac{8}{3}a, \\
\dfrac{7}{2}b < a + b + c < \dfrac{15}{4}b.
\end{cases}
$$

由前两式得 $\dfrac{17}{6}c < a + b + c < \dfrac{16}{6}a$, 故 $17c < 16a < 17a$, 因此 $c < a$.

再由第一个和第三个式子得 $\dfrac{7}{2}b < a + b + c < 3c < \dfrac{7}{2}c$, 因此 $b < c$.

综上知 $b < c < a$. □

例 10 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是实数, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是正数, 证明

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} \leq \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\}.$$

解. 设 $A = \min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\}$, $B = \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\}$.

对任意的 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 由 $A \leq \frac{a_k}{b_k} \leq B$, 及 $b_k > 0$, 得

$$Ab_k \leq a_k \leq Bb_k.$$

求和得

$$A(b_1+\cdots+b_n) \leq a_1+\cdots+a_n \leq B(b_1+\cdots+b_n),$$

即

$$A \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} \leq B.$$

□

例 11 设 $x, y \in (0,1)$, $x \neq y$, 比较 $\frac{x^n}{1-x^2} + \frac{y^n}{1-y^2}$ 和 $\frac{x^n+y^n}{1-xy}$ 的大小.

解. 设 $\frac{x^n}{1-x^2} = A$, $\frac{y^n}{1-y^2} = B$, 则 $x^n = A(1-x^2)$, $y^n = B(1-y^2)$, 因此

$$x^n + y^n = A(1-x^2) + B(1-y^2).$$

因 $\frac{x^{n+1}}{1-x^2}$ 在 $(0,1)$ 上严格增, 故当 $x \neq y$ 时,

$$\begin{aligned} &(A+B)(1-xy) - A(1-x^2) - B(1-y^2) \\ =&Ax^2 + By^2 - (A+B)xy = (Ax-By)(x-y) \\ =&\left(\frac{x^{n+1}}{1-x^2} - \frac{y^{n+1}}{1-y^2}\right)(x-y) > 0. \end{aligned}$$

因此

$$x^n + y^n = A(1-x^2) + B(1-y^2) < (A+B)(1-xy),$$

即

$$\frac{x^n}{1-x^2} + \frac{y^n}{1-y^2} = A + B > \frac{x^n+y^n}{1-xy}.$$

□

例 12 设 $a = \log_5(3^x+4^x)$, $b = \log_4(5^x-3^x)$, 且 $a \geq b$. 比较 a 与 x 的大小.

解. 由 $3^x + 4^x = 5^a$, $5^x - 3^x = 4^b$, 得 $5^x - 4^b = 3^x = 5^a - 4^x$, 因此

$$4^x + 5^x = 4^b + 5^a \leq 4^a + 5^a.$$

再由 $f(t) = 4^t + 5^t$ 严格单调增知 $x \leq a$. □

例13 设 $f(x)=ax^2+bx$, $1\le f(-1)\le 2$, $2\le f(1)\le 4$, 求 $f(-2)$ 的取值范围.

解. 由 $f(1)=a+b$, $f(-1)=a-b$, 得

$$a=\frac{f(1)+f(-1)}{2},\quad b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned}f(-2)&=\frac{f(1)+f(-1)}{2}\cdot(-2)^2+\frac{f(1)-f(-1)}{2}\cdot(-2)\\&=f(1)+3f(-1).\end{aligned}$$

所以 $f(-2)$ 的取值范围为 $[5,10]$. □

例14 定义在 $(-1,1)$ 上的函数 f 满足:

(1) 对任意的 $x,y\in(-1,1)$, 都有 $f(x)+f(y)=f\Big(\dfrac{x+y}{1+xy}\Big)$;

(2) 当 $x\in(-1,0)$ 时, $f(x)>0$.

比较 $f\Big(\dfrac{1}{5}\Big)+f\Big(\dfrac{1}{11}\Big)+\cdots+f\Big(\dfrac{1}{n^2+3n+1}\Big)$ 与$f\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$ 的大小.

解. 由 $f(0)+f(0)=f\Big(\dfrac{0+0}{1+0\cdot 0}\Big)=f(0)$, 得 $f(0)=0$.

又由 $f(x)+f(-x)=f\Big(\dfrac{x+(-x)}{1+x(-x)}\Big)=f(0)=0$, 知 f 为奇函数.

因当 $x\in(-1,0)$ 时, $f(x)>0$, 故当 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)=-f(-x)<0$.

因

$$\frac{1}{k^2+3k+1}=\frac{1}{(k+1)(k+2)-1}=\frac{\Big(\dfrac{1}{k+1}\Big)+\Big(-\dfrac{1}{k+2}\Big)}{1+\Big(\dfrac{1}{k+1}\Big)\Big(-\dfrac{1}{k+2}\Big)},$$

故

$$f\Big(\frac{1}{k^2+3k+1}\Big)=f\Big(\frac{1}{k+1}\Big)+f(-\frac{1}{k+2}\Big)=f\Big(\frac{1}{k+1}\Big)-f(\frac{1}{k+2}\Big).$$

因此

$$f\Big(\frac{1}{5}\Big)+f\Big(\frac{1}{11}\Big)+\cdots+f\Big(\frac{1}{n^2+3n+1}\Big)=f\Big(\frac{1}{2}\Big)-f\Big(\frac{1}{n+2}\Big)>f\Big(\frac{1}{2}\Big).$$ □

定理 1 (Schur) 设 $r>0$. 若 x,y,z 都是非负的, 则

$$\sum_{cyc} x^r(x-y)(x-z)\geq 0,$$

即

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\geq 0.$$

当且仅当 $x=y=z$, 或其中一个为零而另外两个相等时, 等号成立.

证明. 不妨设 $x\geq y\geq z$. 令

$$t_1=x-y,\quad t_2=y-z,\quad t_3=z,$$

则 $t_1,t_2,t_3\geq 0$, 且

$$x=t_1+t_2+t_3,\quad y=t_2+t_3,\quad z=t_3.$$

因此

$$\begin{aligned}
&x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\\
=&(t_1+t_2+t_3)^r t_1(t_1+t_2)+(t_2+t_3)^r t_2(-t_1)+{t_3}^r(-t_1-t_2)(-t_2)\\
=&(t_1+t_2+t_3)^r {t_1}^2+\big((t_1+t_2+t_3)^r-(t_2+t_3)^r+{t_3}^r\big)t_1t_2+{t_3}^r t_2^2\geq 0.
\end{aligned}$$

当 $x=y=z$ 时, 显然等号成立. 当 $z=0$ 且 $x=y$ 时, 等号显然也成立.

反过来, 设等号成立.

(1) 若 $t_2\neq 0$, 则 $t_1+t_2+t_3\neq 0$. 由 ${t_3}^r t_2^2=0$ 和 $(t_1+t_2+t_3)^r {t_1}^2=0$ 知 $t_3=0$, $t_1=0$, 即 $z=0$, $x=y$.

(2) 若 $t_2=0$, 则由 ${t_1}^{r+2}\leq(t_1+t_2+t_3)^r {t_1}^2=0$ 知 $t_1=0$, 此时 $x=y=z$. □

注 1. 对 $r=0$, 把 x^r,y^r,z^r 都视为 1, Schur 不等式也成立. 事实上,

$$\begin{aligned}
&(x-y)(x-z)+(y-z)(y-x)+(z-x)(z-y)\\
=&x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq 0.
\end{aligned}$$

注 2. 若 $r<0$, 则对任意的正数 x,y,z, 也有 Schur 不等式.

注 3. 通常记 $p=x+y+z,\ q=xy+yz+zx,\ r=xyz$.

注 4. 当 $r=1$ 时, Schur 不等式为

$$\sum_{cyc} x(x-y)(x-z)\geq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{cyc} x^3 + 3xyz \geq \sum_{cyc} xy(x+y), \tag{2}$$

$$\Big(\sum_{cyc} x\Big)^3 + 9xyz \geq 4\Big(\sum_{cyc} x\Big)\Big(\sum_{cyc} xy\Big), \tag{3}$$

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \leq xyz. \tag{4}$$

证明. (2) 由 Schur 不等式知

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{cyc} x(x-y)(x-z)\\
&= \sum_{cyc}(x^3 - x^2y - zx^2 + xyz)\\
&= \sum_{cyc} x^3 - \sum_{cyc} x^2y - \sum_{cyc} zx^2 + \sum_{cyc} xyz\\
&= \sum_{cyc} x^3 - \sum_{cyc} x^2y - \sum_{cyc} xy^2 + \sum_{cyc} xyz\\
&= \sum_{cyc} x^3 + 3xyz - \sum_{cyc} xy(x+y).
\end{aligned}$$

(3) 因 $\Big(\sum_{cyc} x\Big)^2 = \sum_{cyc} x^2 + 2\sum_{cyc} xy$, 并且

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{cyc} x\Big)\Big(\sum_{cyc} xy\Big) &= \Big(\sum_{cyc} xy\Big)(x+y+z)\\
&= \sum_{cyc} xy(x+y+z)\\
&= \sum_{cyc} xy(x+y) + \sum_{cyc} xyz\\
&= \sum_{cyc} xy(x+y) + 3xyz,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{cyc} x\Big)^3 &= \Big(\sum_{cyc} x\Big)^2\Big(\sum_{cyc} x\Big)\\
&= \Big(\sum_{cyc} x^2 + 2\sum_{cyc} xy\Big)\Big(\sum_{cyc} x\Big)\\
&= \sum_{cyc} x^2(x+y+z) + 2\Big(\sum_{cyc} xy\Big)\Big(\sum_{cyc} x\Big)\\
&= \sum_{cyc}(x^3 + x^2y + zx^2) + 2\Big(\sum_{cyc} xy(x+y) + 3xyz\Big)\\
&= \sum_{cyc} x^3 + \sum_{cyc} x^2y + \sum_{cyc} zx^2 + 2\sum_{cyc} xy(x+y) + 6xyz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{cyc} x^3 + \sum_{cyc} x^2y + \sum_{cyc} xy^2 + 2\sum_{cyc} xy(x+y) + 6xyz \\
&= \sum_{cyc} x^3 + \sum_{cyc} xy(x+y) + 2\sum_{cyc} xy(x+y) + 6xyz \\
&= \sum_{cyc} x^3 + 3\sum_{cyc} xy(x+y) + 6xyz,
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{cyc} x\Big)^3 + 9xyz &= \sum_{cyc} x^3 + 3xyz + 3\sum_{cyc} xy(x+y) + 12xyz \\
&\geq \sum_{cyc} xy(x+y) + 3\sum_{cyc} xy(x+y) + 12xyz \\
&= 4\Big(\sum_{cyc} xy(x+y) + 3xyz\Big) \\
&= 4\Big(\sum_{cyc} x\Big)\Big(\sum_{cyc} xy\Big).
\end{aligned}
$$

(3) 由对称性知存在常数 A, B 使得对任意的 x, y, z 都有

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) = -\sum_{cyc} x^3 + A\sum_{cyc} xy(x+y) + Bxyz.$$

令 $z = 0$ 得

$$(y-x)(x-y)(x+y) = -x^3 - y^3 + Axy(x+y).$$

再令 $x = y = 1$, 得 $0 = -2 + 2A$, 故 $A = 1$. 在

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) = -\sum_{cyc} x^3 + \sum_{cyc} xy(x+y) + Bxyz$$

中令 $x = y = z = 1$ 得 $1 = -3 + 6 + B$, 故 $B = -2$. 于是, 由 Schur 不等式得

$$xyz - (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) = \sum_{cyc} x^3 - \sum_{cyc} xy(x+y) + 3xyz \geq 0. \qquad \square$$

例 15 设 a, b, c 为三角形的三边, 证明

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

解. 由 Schur 不等式得

$$
\begin{aligned}
3abc - \sum_{cyc} a^2(b+c-a) &= 3abc - \Big(\sum_{cyc} a^2b + \sum_{cyc} a^2c - \sum_{cyc} a^3\Big) \\
&= 3abc - \Big(\sum_{cyc} a^2b + \sum_{cyc} b^2a - \sum_{cyc} a^3\Big) \\
&= 3abc - \Big(\sum_{cyc}(a^2b + b^2a) - \sum_{cyc} a^3\Big)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{cyc} a^3 + 3abc - \sum_{cyc} ab(a+b) \geq 0. \qquad \square$$

注. 实际上, 只要 a, b, c 非负即可.

例16 设正数 a, b, c 满足 $abc = 1$, 证明

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big).$$

解. 因 $abc = 1$, 故

$$2\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) = 2\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big)abc = 2\sum_{cyc} ab.$$

因 $a^2 + b^2 + c^2 + 3 = \Big(\sum\limits_{cyc} a\Big)^2 - 2\sum\limits_{cyc} ab + 3$, 故只需证

$$\Big(\sum_{cyc} a\Big)^2 + 3 \geq 4\sum_{cyc} ab.$$

由均值不等式知 $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3abc$, 再由 Schur 不等式, 得

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{cyc} a\Big)\Big(\Big(\sum_{cyc} a\Big)^2 + 3 - 4\sum_{cyc} ab\Big) &= \Big(\sum_{cyc} a\Big)^3 + 3\sum_{cyc} a - 4\Big(\sum_{cyc} ab\Big)\Big(\sum_{cyc} a\Big) \\ &\geq \Big(\sum_{cyc} a\Big)^3 + 9abc - 4\Big(\sum_{cyc} ab\Big)\Big(\sum_{cyc} a\Big) \geq 0,\end{aligned}$$

因此有 $\Big(\sum\limits_{cyc} a\Big)^2 + 3 \geq 4\sum\limits_{cyc} ab$. $\square$

§ 5.2 不等式的解法

解不等式常用的方法有等价化归, 同解变形, 分类讨论, 数形结合, 以及利用不等式与方程, 函数, 以及和其他知识之间的联系. 下面列出一些常见情形.

1. 一元多项式不等式

   (1) $ax > b$.

   (2) $ax^2 + bx + c > 0$.

   (3) 简单的一元高次不等式: 数轴标根法.

2. 分式不等式

   (1) $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)f(y) > 0$.

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \iff \begin{cases} f(x)f(y) \geq 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$.

3. 无理不等式

(1) $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \iff 0 \leq f(x) < g(x)$.

(2) $\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$

(3) $\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$

4. 含有绝对值的不等式: 利用绝对值的定义分类讨论, 数形结合, 或两边平方.

(1) $|x| < c \iff \begin{cases} -c < x < c, & c > 0, \\ \varnothing, & c \leq 0. \end{cases}$

(2) $|f(x)| < g(x) \iff -g(x) < f(x) < g(x)$.

(3) $|x| > c \iff \begin{cases} x > c \text{ 或 } x < -c, & c > 0, \\ x \neq 0, & c = 0, \\ \mathbb{R}, & c < 0. \end{cases}$

(4) $|f(x)| > g(x) \iff f(x) > g(x)$ 或 $f(x) < -g(x)$.

(5) $|f(x)| > |g(x)| \iff (f(x))^2 > (g(x))^2 \iff (f(x)+g(x))(f(x)-g(x)) > 0$.

5. 指数不等式, 对数不等式, 三角函数不等式: 利用函数的单调性.

例 1 解不等式 $(2^x - 1)(3^x - 9)(5^x - 125)^2 > 0$.

解. $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$. □

例 2 解不等式 $2x - |x - a| > 2$.

解. 由 $|x - a| < 2x - 2$ 知

$$-(2x-2) < x - a < 2x - 2,$$

因此 $x > \dfrac{a+2}{3}$, $x > 2 - a$, 即 $x > \max\left\{2 - a, \dfrac{a+2}{3}\right\}$. □

例 3 若 $0 \leq x \leq 2\pi$, 则不等式 $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) > \cos x$ 的解为____________.

解. $\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{4\pi}{3}$. □

例4 设 $0 \le \theta < 2\pi$, 解不等式 $\sin^3\theta - \cos^3\theta \ge \cos\theta - \sin\theta$.

解. 由条件得 $(\sin\theta - \cos\theta)(2 + \sin\theta\cos\theta) \ge 0$, 即 $\sin\theta \ge \cos\theta$.

所以不等式的解集为 $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$. □

例5 设

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}, & -1 \le x < 0, \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

解不等式 $f(x) > f(-x) + x$.

解. 当 $x \in (0,1]$ 时, $-x \in [-1,0)$, 要解的不等式为 $\sqrt{1-x^2} > -\sqrt{1-(-x)^2} + x$, 即 $2\sqrt{1-x^2} > x$. 由此可解得 $0 < x < \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

当 $x \in [-1,0)$ 时, $-x \in (0,1]$, 要解的不等式为 $-\sqrt{1-x^2} > \sqrt{1-(-x)^2} + x$, 即 $2\sqrt{1-x^2} < -x$. 由此可解得 $-1 < x < -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

当 $x = 0$ 时, 不等式不成立.

综上, 不等式的解集为 $\big(-1, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\big) \cup \big(0, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\big)$. □

例6 解不等式 $\sqrt{\log_2 x - 1} + \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x^3) + 2 > 0$.

解. 设 $\sqrt{\log_2 x - 1} = t$, 则 $t \ge 0$, 且不等式变为 $t - \dfrac{3}{2}(t^2+1) + 2 > 0$, 即

$$3t^2 - 2t - 1 < 0.$$

解出 $0 \le t < 1$, 进而 $2 \le x < 4$. □

例7 解不等式 $|x|^3 - 2x^2 + 1 < 0$.

解. 要解的不等式可写为 $|x|^3 - 2|x|^2 + 1 < 0$. 因不等式

$$t^3 - 2t^2 + 1 < 0$$

的解集为 $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup \left(1, \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, 故所求不等式的解集为

$$\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}, -1\right) \cup \left(1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$ □

例8 解不等式 $\lg\left(x - \dfrac{1}{x}\right) \le 0$.

解. 首先函数 $f(x)=\lg\Big(x-\dfrac{1}{x}\Big)$ 的定义域为 $D=\Big\{x\,\Big|\,x-\dfrac{1}{x}>0\Big\}$. 再利用 lg 的单调性, 知不等式的解集为 $S=\Big\{x\,\Big|\,0<x-\dfrac{1}{x}\le 1\Big\}$. 利用二次函数的性质, 就有

$$0\le\frac{x^2-1}{x}\le 1 \iff \frac{x^2-1}{x}\Big(\frac{x^2-1}{x}-1\Big)\le 0 \iff (x^2-1)(x^2-x-1)\le 0$$
$$\iff (x+1)\Big(x-\frac{1-\sqrt5}{2}\Big)(x-1)\Big(x-\frac{1+\sqrt5}{2}\Big)\le 0.$$

所以 $\Big\{x\,\Big|\,0\le x-\dfrac{1}{x}\le 1\Big\}=\Big[-1,\ \dfrac{1-\sqrt5}{2}\Big]\cup\Big[1,\ \dfrac{1+\sqrt5}{2}\Big]$. 再注意方程 $x-\dfrac{1}{x}=0$ 的解集为 $\{-1,1\}$, 就得到不等式的解集

$$\begin{aligned}S&=\Big\{x\,\Big|\,0<x-\frac{1}{x}\le 1\Big\}\\&=\Big\{x\,\Big|\,0\le x-\frac{1}{x}\le 1\Big\}\setminus\Big\{x\,\Big|\,x-\frac{1}{x}=0\Big\}\\&=\Big(\Big[-1,\ \frac{1-\sqrt5}{2}\Big]\cup\Big[1,\ \frac{1+\sqrt5}{2}\Big]\Big)\setminus\{-1,1\}\\&=\Big(-1,\ \frac{1-\sqrt5}{2}\Big]\cup\Big(1,\ \frac{1+\sqrt5}{2}\Big].\end{aligned}$$ □

注. 若 $a<b$, 则 $a\le\varphi(x)\le b \iff (\varphi(x)-a)(\varphi(x)-b)\le 0$.

例 9 解不等式 $\dfrac{8}{(x+1)^3}+\dfrac{10}{x+1}-x^3-5x>0$.

解. 注意到不等式可变为 $\Big(\dfrac{2}{x+1}\Big)^3+5\cdot\dfrac{2}{x+1}>x^3+5x$.

因为 $f(t)=t^3+5t$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调增, 故不等式的解集为

$$S=\Big\{x\,\Big|\,\frac{2}{x+1}>x\Big\}=(-\infty,-2)\cup(-1,1).$$ □

例 10 解不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\ge 24$.

解. 由 $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-24\ge 0$ 得 $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)\ge 0$, 因此

$$x(x-5)(x^2-5x+10)\ge 0.$$

由此可求出不等式的解集为 $(-\infty,0]\cup[5,+\infty)$. □

例 11 求不等式 $\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2+6x+13}<8$ 的解集.

解. 注意曲线 $\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=8$ 即 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$. 所以二元不等式 $\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}<8$ 的解集为椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$ 内的点集.

在此结论中, 令 $y=2$ 即得本题答案 $\big(-\frac{4}{7}\sqrt{21},\frac{4}{7}\sqrt{21}\big)$. □

例12 已知函数 $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1+x}$.

(1) 求 f 的定义域, 值域, 并证明 f 严格单调减;

(2) 解不等式 $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1+x}\ge\dfrac{1}{2}$.

解. (1) f 的定义域为

$$D=\{x\,\big|\,1+x\ge 0\}\cap\{x\,\big|\,1-x^2\ge 0\}=[-1,+\infty)\cap[-1,1]=[-1,1].$$

设 $g(t)=\sin t$, $t\in\big[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\big]$, 则

$$\begin{aligned}f(g(t))&=\sqrt{1+\cos t}-\sqrt{1+\sin t}\\&=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}-(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2})\\&=(\sqrt{2}-1)\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\\&=\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cos\big(\frac{t}{2}+\psi_0\big),\end{aligned}$$

其中 $\psi_0\in\big(0,\dfrac{\pi}{2}\big)$, $\tan\psi_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$. 因 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}>1=\tan\dfrac{\pi}{4}$, 故 $\psi_0\in\big(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\big)$. 因为 cos 在 $\big[0,\dfrac{\pi}{2}\big]$ 上严格递减, 所以 $f\circ g$ 在 $\big[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\big]$ 上严格递减.

对任意的 $x_1,x_2\in[-1,1]$, 因 $g:\big[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\big]\to[-1,1]$ 是满射, 故存在 $t_1,t_2\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 使得 $x_1=g(t_1)$, $x_2=g(t_2)$. 设 $x_1<x_2$. 因为 g 是严格单调增, 而 $g(t_1)<g(t_2)$, 故 $t_1<t_2$. 再由 $f\circ g$ 严格单调减, 知 $f(g(t_1))>f(g(t_2))$, 即 $f(x_1)>f(x_2)$. 所以 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 严格单调减.

因此 f 的值域为 $R=[f(1),f(-1)]=[1-\sqrt{2},1]$.

(2) 因 $\dfrac{1}{2}\in[1-\sqrt{2},1]$, 故存在 $x_0\in[-1,1]$ 使得 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$. 因 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}>\sqrt{2}-1=f(0)$, 故 $x_0<0$, 即 $x_0\in[-1,0)$. 又存在 $t\in\big[-\dfrac{\pi}{2},0)$, 使得 $g(t)=x_0$, 于是 $f(g(t))=\dfrac{1}{2}$, 即 $\sqrt{1+\cos t}-\sqrt{1+\sin t}=\dfrac{1}{2}$. 两边平方得

$$2+\cos t+\sin t-2\sqrt{(1+\cos t)(1+\sin t)}=\frac{1}{4}.$$

记 $\cos t+\sin t=p$, 则 $\sin t\cos t=\dfrac{1}{2}(p^2-1)$, 且由 $t\in\big[-\dfrac{\pi}{2},0)$, 知 $p\in[-1,1)$. 将 $\cos t+\sin t=p$ 和 $\sin t\cos t=\dfrac{1}{2}(p^2-1)$ 代入上面的方程后, 再化简得

$$16p^2+8p-17=0.$$

由此可解出 $p=\dfrac{-1+3\sqrt{2}}{4}$. 再进一步解出 $x_0=\sin t=\dfrac{3\sqrt{2}-1-\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{8}$. 所以不等式的解集是 $\Big[-1,\dfrac{3\sqrt{2}-1-\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{8}\Big]$. □

§ 5.3 证明不等式

☆☆ 利用基本性质

例 1 证明: 对任意正整数 n 都有 $\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$.

解. 由 $\dfrac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} = \dfrac{(n+1)^n}{n!} > 1$ 立得. □

例 2 证明: $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n+1}{2n} > \sqrt{n+1}$.

解. 设 $A = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n+1}{2n}$. 因 $k^2 > k^2-1 = (k-1)(k+1)$, 故

$$\begin{aligned} A^2 &= \Big(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\Big)\cdot\Big(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\Big) \\ &= \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n+1)\cdot(2n+1)}{(2n)\cdot(2n+2)}\cdot\frac{2n+2}{2} \\ &> n+1. \end{aligned}$$ □

例 3 设 n 是正整数, 证明

$$\frac{1}{n+1}\Big(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\Big) \geq \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big).$$

解. 记 $A = 1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}$, $B = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$, 则

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

因此

$$\begin{aligned} nA-(n+1)B &= n\Big(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\Big) - (n+1)\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big) \\ &\geq \frac{n}{2} - \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big) \geq 0. \end{aligned}$$ □

例 4 设 $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2+y^2 \leq 1$, 证明 $|x^2+2xy-y^2| \leq \sqrt{2}$.

解. 记 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, 则存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. 于是

$$|x^2+2xy-y^2| = r^2|\cos 2t + \sin 2t| \leq \sqrt{2}r^2 \leq \sqrt{2}.$$ □

例 5 已知 $k > a > b > c > 0$, 证明: $k^2-(a+b+c)k+(ab+bc+ca) > 0$.

解. 因 $(k-a)(k-b)(k-c) > 0$, 故

$$\begin{aligned} 0 &< k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k-abc \\ &< k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k \end{aligned}$$

$$= k(k^2 - (a+b+c)k + (ab+bc+ca)). \qquad \square$$

⋆⋆ 三角不等式

例 6 设 $f(x) = x^2 + bx + c$, 证明 $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\dfrac{1}{2}$.

解. 因 $f(1) = 1 + b + c$, $f(2) = 4 + 2b + c$, $f(3) = 9 + 3b + c$, 故

$$f(2) - f(1) = b + 3, \quad f(3) - f(2) = b + 5,$$

因此 $f(1) - 2f(2) + f(3) = 2$. 由三角不等式知

$$|f(1)| + 2|f(2)| + |f(3)| \ge |f(1) - 2f(2) + f(3)| = 2.$$

所以 $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\dfrac{1}{2}$. $\square$

例 7 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac \ne 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$, 且当 $|x| \le 1$ 时, $|f(x)| \le 2$. 证明: 当 $|x| \le 1$ 时, $|g(x)| \le 4$.

解. 由条件知 $|a - b + c| = |f(-1)| \le 2$, $|c| = |f(0)| \le 2$, $|a + b + c| = |f(1)| \le 2$. 当 $|x| \le 1$ 时, 利用三角不等式, 得

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |(cx^2 - c) + (bx + a + c)| \\ &\le |c| \cdot |x^2 - 1| + |bx + a + c| \\ &\le |c| + \max\{|b \cdot (-1) + a + c|,\ |b \cdot 1 + a + c|\} \\ &\le 4. \end{aligned} \qquad \square$$

注. 这里用到了下述结论: 若 $f(x) = Ax + B$, 则

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max\{|f(a)|,\ |f(b)|\}.$$

⋆⋆ 二次函数判别式

例 8 设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $a_1^2 > \sum\limits_{i=2}^n a_i^2$, $b_1^2 > \sum\limits_{i=2}^n b_i^2$. 证明:

$$\Big(a_1b_1 - \sum_{i=2}^n a_ib_i\Big)^2 \ge \Big(a_1^2 - \sum_{i=2}^n a_i^2\Big)\Big(b_1^2 - \sum_{i=2}^n b_i^2\Big).$$

解. 设 $f(x) = \Big(a_1^2 - \sum\limits_{i=2}^n a_i^2\Big)x^2 - 2\Big(a_1b_1 - \sum\limits_{i=2}^n a_ib_i\Big)x + \Big(b_1^2 - \sum\limits_{i=2}^n b_i^2\Big)$, 则

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 - \sum_{i=2}^n (a_ix - bi)^2,$$

故 $f(0)=b_1^2-\sum\limits_{i=2}^n b_i^2>0$, $f\Big(\dfrac{b_1}{a_1}\Big)=-\sum\limits_{i=2}^n\Big(a_i\cdot\dfrac{b_1}{a_1}-bi\Big)^2\le 0$, 因此 $f(x)=0$ 必有零点, 所以二次函数 $f(x)$ 的判别式不小于 0. □

例 9 设实数 x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 满足 $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1$. 证明

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-1)^2\ge(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)(y_1^2+y_2^2+y_3^2-1).$$

解. 只需在满足 $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ 且 $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ 的条件下证明.

这就是上题取 $x_0=1$, $y_0=1$ 的情形. □

⋆⋆ 单调性和凸性

例 10 设整数 $n\ge 3$, 证明 $n^{n+1}>(n+1)^n$.

解. 设 $a_n=\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\Big(1+\frac{1}{n^2+2n}\Big)^{n+1}>1,$$

故 $\{a_n\}$ 严格单调增, 所以 $n\ge 3$ 时, $a_n\ge a_3$, 即

$$\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}>\frac{3^4}{4^3}>1.$$ □

例 11 设正整数 $n>1$. 证明:

(1) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{n-1}{n}$.

(2) $\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{n+1}\le\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\le\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{n}$.

解. (2) 设 $a_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{7}{12}+\dfrac{1}{n+1}$, 则

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0,$$

故 $\{a_n\}$ 严格增, 因此, 当 $n\ge 2$ 时 $a_n\ge a_2=0$.

设 $b_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{n}$, 则

$$b_n-b_{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}>0,$$

故 $\{b_n\}$ 严格减, 因此, 当 $n\ge 2$ 时 $b_n\ge b_2=0$. □

例 12 已知正数 a,b,c 满足 $a<b+c$, 证明 $\dfrac{a}{1+a}<\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$.

解. 因 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增, 故

$$\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}>\frac{b}{1+b+c}+\frac{c}{1+b+c}=\frac{b+c}{1+b+c}>\frac{a}{1+a}.$$ □

例 13 证明 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}\le\dfrac{11}{10}$.

解. 设 $f(n)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}$, 则

$$\begin{aligned}
f(n+1)-f(n)&=\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}\\
&=\frac{2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}\\
&=\frac{2}{(9n^2+15n+6)(3n+4)}\\
&\le\frac{2}{(8n^2+16n+6)(2n+5)}\\
&=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\\
&=\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\Big).
\end{aligned}$$

所以 $f(n+1)<f(1)+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{(2\cdot1+1)(2\cdot1+3)}=\dfrac{11}{10}$. □

⋆⋆ 数学归纳法

例 14 用数学归纳法证明:

(1) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}<2$;

(2) $1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}<2$.

例 15 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in[1,+\infty)$, 证明

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+a_1a_2\cdots a_n.$$

解. 对元素个数 n 用数学归纳法.

$n=1$ 时, 显然成立.

假设 $n=k$ $(k\ge1)$ 时结论成立. 当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
&\Big(a_1+\cdots+a_{k+1}+\frac{1}{a_1\cdots a_{k+1}}\Big)-\Big(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}+a_1\cdots a_{k+1}\Big)\\
=&\Big(a_1+\cdots+a_k-\Big(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_k}\Big)\Big)+a_{k+1}-\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{1}{a_1\cdots a_{k+1}}-a_1\cdots a_{k+1}\\
\le&\Big(a_1\cdots a_k-\frac{1}{a_1\cdots a_k}\Big)+a_{k+1}-\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{1}{a_1\cdots a_{k+1}}-a_1\cdots a_{k+1}\\
=&\Big(a_1\cdots a_k-a_1\cdots a_{k+1}\Big)+\Big(\frac{1}{a_1\cdots a_{k+1}}-\frac{1}{a_1\cdots a_k}\Big)+\Big(a_{k+1}-\frac{1}{a_{k+1}}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(1-a_{k+1})a_1\cdots a_k+\frac{1-a_{k+1}}{a_1\cdots a_{k+1}}+\frac{(a_{k+1}-1)(a_{k+1}+1)}{a_{k+1}}\\
&=(1-a_{k+1})\Big(a_1\cdots a_k+\frac{1}{a_1\cdots a_{k+1}}-\frac{a_{k+1}+1}{a_{k+1}}\Big)\\
&=(1-a_{k+1})\Big(a_1\cdots a_k-1-\frac{a_1\cdots a_k-1}{a_1\cdots a_{k+1}}\Big)\\
&=(1-a_{k+1})(a_1\cdots a_k-1)\Big(1-\frac{1}{a_1\cdots a_{k+1}}\Big)\\
&=(1-a_{k+1})(a_1\cdots a_k-1)(a_1\cdots a_{k+1}-1)\cdot\frac{1}{a_1\cdots a_{k+1}}\\
&\le 0.
\end{aligned}
$$
□

⋆⋆ 利用已知的不等式

例 16 已知 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 证明 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge\sqrt{2}(a+b+c)$.

解. 由均值 (幂平均) 不等式得 $\sqrt{a^2+b^2}\ge\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$, 相加即可. □

例 17 设 n 是大于 1 的整数, 证明 $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n>n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$.

解. 由二项式定理知 $(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$, 故由均值不等式得

$$
\begin{aligned}
C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1&=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}\\
&=\frac{1}{2}\Big((1+2^{n-1})+(2+2^{n-2})+\cdots+(2^{n-1}+1)\Big)\\
&=\frac{1}{2}\cdot n\cdot 2\sqrt{2^{n-1}}=n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}.
\end{aligned}
$$
□

例 18 设 a,b,c 是某三角形的三边长, 证明:

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\ge a+b+c.$$

解. 证法 1. 由均值不等式有

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2}{b+c-a}+(b+c-a)\ge 2a,\\
\frac{b^2}{c+a-b}+(c+a-b)\ge 2b,\\
\frac{c^2}{a+b-c}+(a+b-c)\ge 2c,
\end{aligned}
$$

三式相加即得结论.

证法 2. 由 $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b+c-a}{a}\ge 2$ 得 $\dfrac{a}{b+c-a}-1\ge 1-\dfrac{b+c-a}{a}$, 故

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}-(a+b+c)$$

$$
\begin{aligned}
&=a\Big(\frac{a}{b+c-a}-1\Big)+b\Big(\frac{b}{c+a-b}-1\Big)+c\Big(\frac{c}{a+b-c}-1\Big)\\
&\geq a\Big(1-\frac{b+c-a}{a}\Big)+b\Big(1-\frac{c+a-b}{b}\Big)+c\Big(1-\frac{a+b-c}{c}\Big)\\
&=(2a-b-c)+(2b-c-a)+(2c-a-b)=0.
\end{aligned}
$$

□

注. 用权方和不等式或 Cauchy 不等式更直接.

例 19 设 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 证明:

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}\geq\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}.$$

解. 由均值不等式有 $(y+z)^2\geq 4yz$, 故 $\dfrac{y+z}{yz}\geq\dfrac{4}{y+z}$, 因此

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{z}=x\cdot\frac{y+z}{yz}\geq\frac{4x}{y+z}.$$

同理有

$$\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\geq\frac{4y}{z+x},$$

$$\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\geq\frac{4z}{x+y}.$$

三式相加即得结论. □

例 20 设 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, $a+3b+5c=15$, 证明: $\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{2c}\leq\sqrt{46}$.

解. 设 $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{5b}$, $z=\sqrt{2c}$, 则 $x^2+\dfrac{3}{5}y^2+\dfrac{5}{2}z^2=15$. 由 Cauchy 不等式知

$$(x+y+z)^2\leq\Big(x^2+\frac{3}{5}y^2+\frac{5}{2}z^2\Big)\Big(1+\frac{5}{3}+\frac{2}{5}\Big)=46.$$

□

例 21 设 $a,b\in\mathbb{R}^+$, 整数 $n\geq 2$, 证明 $\dfrac{a^n+b^n}{2}\geq\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^n$.

解. 这是幂平均不等式, 也可直接证明. 不妨设 $a\neq b$. 用二项式定理,

$$
\begin{aligned}
\frac{a^n+b^n}{2}&=\frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\Big)^n+\Big(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\Big)^n\Big)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^{n-k}\Big(\Big(\frac{a-b}{2}\Big)^k+(-1)^k\Big(\frac{a-b}{2}\Big)^k\Big)\\
&=\sum_{l=0}^{[n/2]}C_n^{2l}\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^{n-2l}\Big(\frac{a-b}{2}\Big)^{2l}\\
&\geq\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^n.
\end{aligned}
$$

□

例 22 已知 $a_n=\frac{1}{2}\Big(t^n+\frac{1}{t^n}\Big)$ (其中 $\frac{1}{2}\le t\le 2$), T_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 证明:

$$T_n<2^n-\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^n.$$

解. 因为 $\frac{1}{2^n}\le t^n\le 2^n$, 所以 $\max\limits_{t\in[\frac{1}{2},2]}\Big(t^n+\frac{1}{t^n}\Big)=2^n+\frac{1}{2^n}$. 再用均值不等式,

$$\begin{aligned}T_n&\le 2^n-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\\&=2^n-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}\Big)\\&<2^n-\sqrt{\frac{1}{2^n}}.\end{aligned}$$

□

例 23 证明:

(1) 若 $x,y,z\in\mathbb{R}$, 则 $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$.

(2) 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, $a+b+c=1$, 则 $a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\le 1$.

(3) 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, $abc=1$, 则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

解. (1) 由 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$ 立得结论.

(2) 由 (1) 得 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge a^2bc+b^2ca+c^2ab=abc(a+b+c)=abc$, 故

$$3abc\le(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2(a^2bc+b^2ca+c^2ab)=(ab+bc+ca)^2.$$

所以

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\le a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2=1.$$

(3) 由均值不等式有 $\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\le\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)$.

同理有另外两个不等式, 三式相加即得结论. □

例 24 已知 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, $abc=1$, 证明:

$$\frac{1}{(2a+1)^3}+\frac{1}{(2b+1)^3}+\frac{1}{(2c+1)^3}\ge\frac{1}{9}.$$

解. 由均值不等式知 $\frac{1}{(2a+1)^3}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\ge\frac{1}{3(2a+1)}$, 故

$$\frac{1}{(2a+1)^3}+\frac{1}{(2b+1)^3}+\frac{1}{(2c+1)^3}\ge\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\Big)-\frac{2}{9}.$$

因此只需证

$$\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\ge 1.$$

通分即知要证 $a+b+c\ge 3$. 由均值不等式知这是显然的. □

§ 5.4 函数的值域, 最大值和最小值

对映射 $f: X \to Y$, 称集合 $\{y \in Y : \text{存在 } x \in X \text{ 使得 } y = f(x)\}$ 为 f 的**值域**. 通常把 f 的值域记为 $f(X)$, $\mathrm{Ran}(f)$, 或 R_f.

若 $f: X \to \mathbb{R}$ 的值域中有最小的元素, 则称其最小元素为 f 的**最小值**, 此时也说 f **有最小值**. 通常把 f 的最小值记为 $\min f$, $\min\limits_{x \in X} f(x)$, 或 $f_{\min}$.

若 $f: X \to \mathbb{R}$ 的值域中有最大的元素, 则称其最大元素为 f 的**最大值**, 此时也说 f **有最大值**. 通常把 f 的最小值记为 $\max f$, $\max\limits_{x \in X} f(x)$, 或 $f_{\max}$.

例 1

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 有最小值 0, 但没有最大值.

(2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto [x]$ 的值域为 $\mathbb{Z}$, 没有最大值, 也没有最小值.

(3) $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 没有最大值和最小值.

(4) 恒同映射 $I_X: X \to X$, $x \to x$ 的值域为 X.

例 2 设 a, b 是正数, $a + b = 2$, 求 $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b}$ 的最小值.

解. 由 Cauchy 不等式知 $((1+a)+(1+b))\Big(\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b}\Big) \geq 4$, 故

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{4}{(1+a)+(1+b)} = 1.$$

当 $a = b = 1$ 时, $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} \geq \dfrac{4}{(1+a)+(1+b)} = 1$, 因此所求的最小值为 1. □

例 3 设 $f(a, b) = (a + 5 - 3|\cos b|)^2 + (a - 2|\sin b|)^2$, 求 $\min\limits_{a,b \in \mathbb{R}} f(a, b)$.

解. 由恒等式 $2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2$ 知 $x^2 + y^2 \geq \dfrac{1}{2}(x - y)^2$, 因此

$$f(a, b) \geq \frac{1}{2}(5 - 3|\cos b| + 2|\sin b|)^2 \geq \frac{1}{2}(5 - 3)^2 = 2.$$

当且仅当 $a = -1$, $b = k\pi$ (k 为整数) 时, $f(a, b) = 2$. 所以 $\min\limits_{a,b \in \mathbb{R}} f(a, b) = 2$. □

例 4 22 求 $z = (a - b)^2 + \left(\sqrt{2 - a^2} - \dfrac{9}{b}\right)^2$ 的最小值.

解. 设 $A(a, \sqrt{2 - a^2})$, $B\Big(b, \dfrac{9}{b}\Big)$, $O(0, 0)$, 得 $z = |AB|^2$, $|OA|^2 = 2$, $|OB|^2 = b^2 + \dfrac{81}{b^2}$.

由均值不等式得 $|OB|^2 = b^2 + \dfrac{81}{b^2} \geq 18$, 故 $|OB| \geq 3\sqrt{2}$.

由三角不等式得 $|AB| \geq |OB| - |OA| = |OB| - \sqrt{2} \geq 2\sqrt{2}$, 故 $z = |AB|^2 \geq 8$.

分析取等条件知, 当 $(a,b)=(1,3)$ 时 $z=8$. 所以 $z_{\min}=8$. $\square$

例 5 设 x_k, y_k $(k=1,2,3)$ 均为非负实数, 求

$$f=\sqrt{(2007-y_1-y_2-y_3)^2+x_3^2}+\sqrt{y_3^2+x_2^2}+\sqrt{y_2^2+x_1^2}+\sqrt{y_1^2+(x_1+x_2+x_3)^2}$$

的最小值.

解. 由三角不等式得

$$\begin{aligned}f&=\sqrt{(2007-y_1-y_2-y_3)^2+x_3^2}+\sqrt{y_3^2+x_2^2}+\sqrt{y_2^2+x_1^2}+\sqrt{y_1^2+(x_1+x_2+x_3)^2}\\&\geq\sqrt{((2007-y_1-y_2-y_3)+y_3+y_2+y_1)^2+(x_3+x_2+x_1+(-x_1-x_2-x_3))^2}\\&=2007.\end{aligned}$$

当 $x_1=x_2=x_3=y_1=y_2=y_3=0$ 时 $f=2007$. 所以 $f_{\min}=2007$. $\square$

例 6 已知正数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$, 求 $\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)}$ 的最小值.

解. 由 Cauchy 不等式, 得

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a(1+b)}\geq\frac{9}{\sum\limits_{cyc}a(1+b)}=\frac{9}{\sum\limits_{cyc}a+\sum\limits_{cyc}ab}=\frac{9}{1+\sum\limits_{cyc}ab}.$$

再由 $1=(a+b+c)^2=\sum\limits_{cyc}a^2+2\sum\limits_{cyc}ab\geq3\sum\limits_{cyc}ab$, 得

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a(1+b)}\geq\frac{9}{1+\frac{1}{3}}=\frac{27}{4},$$

当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时等号成立, 故所求的最小值为 $\dfrac{27}{4}$. $\square$

例 7 设 a, b 是正常数, 求 $y=\dfrac{a}{\sin x}+\dfrac{b}{\cos x}$ $(0<x<\dfrac{\pi}{2})$ 的最小值.

解. 对任意的正数 k, 都有

$$\begin{aligned}y&=\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+k(\sin^2x+\cos^2x-1)\\&=\left(\frac{a}{2\sin x}+\frac{a}{2\sin x}+k\sin^2x\right)+\left(\frac{b}{2\cos x}+\frac{b}{2\cos x}+k\cos^2x\right)-k\\&\geq3\sqrt[3]{\left(\frac{a}{2\sin x}\right)^2\cdot k\sin^2x}+3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2\cos x}\right)^2\cdot k\cos^2x}-k\\&=3\sqrt[3]{\frac{k}{4}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})-k.\end{aligned}$$

进而可得, 当且仅当 $x=\arctan\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ 时, y 取到最小值 $y_{\min}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

例 8 设 $c\neq 0$, 当非零实数 a,b 满足 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$, 且使 $|2a+b|$ 最大时, $\dfrac{3}{a}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{5}{c}$ 的最小值是____________.

解. 设 $2a+b=t$, 则 $2a=t-b$, 故 $(t-b)^2-(t-b)b+4b^2-c=0$, 即

$$6b^2-3bt+t^2-c=0.$$

因上面关于 b 的二次方程有实数解, 故 $(3t)^2-24(t^2-c)\geq 0$, 即 $|t|\leq\sqrt{\dfrac{8c}{5}}$. 当 $|t|$ 取得最大值 $\sqrt{\dfrac{8c}{5}}$ 时, $c=\dfrac{5t^2}{8}$, $b=\dfrac{t}{4}$, $a=\dfrac{3t}{8}$. 此时

$$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}=\frac{8}{t}-\frac{16}{t}+\frac{8}{t^2}=8\Big(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\Big)^2-2\geq -2. \qquad \square$$

例 9 若 $a,b\in\mathbb{R}^+$, $a+\sqrt{b^2+8}=4$, 则 $\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为________.

解. 由 Cauchy 不等式, 有 $\sqrt{b^2+8}=\sqrt{b^2+1^2+\cdots+1^2}\geq\dfrac{b+8}{3}$, 当且仅当 $b=1$ 时取等号. 所以

$$4=a+\sqrt{b^2+8}\geq a+\frac{b+8}{3}=\frac{3a+b}{3}+\frac{8}{3},$$

即 $3a+b\leq 4$. 再由

$$4\Big(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\Big)\geq(3a+b)\Big(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\Big)=10+3\Big(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\Big)\geq 16$$

知, 当且仅当 $a=b=1$ 时, $\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}$ 取最小值 4. $\square$

例 10 若正数 $a,\ b,\ c$ 满足 $abc+a+c=b$, 则 $\dfrac{2}{a^2+1}+\dfrac{3}{c^2+1}-\dfrac{2}{b^2+1}$ 的最大值为____.

解. 由 $b=\dfrac{a+c}{1-ac}$ 知, 可设

$$a=\tan\alpha,\quad c=\tan\beta,\quad b=\tan(\alpha+\beta),$$

$\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\big(0,\dfrac{\pi}{2}\big)$, 则

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{a^2+1}+\frac{3}{c^2+1}-\frac{2}{b^2+1}=2\cos^2\alpha-2\cos^2(\alpha+\beta)+3\cos^2\beta\\
=\;&\cos 2\alpha-\cos 2(\alpha+\beta)+3\cos^2\beta\\
=\;&(1-\cos 2\beta)\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\sin 2\beta+3\cos^2\beta\\
=\;&2\sin^2\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\sin 2\beta+3\cos^2\beta\\
=\;&2\sin\beta\sin(2\alpha+\beta)+3\cos^2\beta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le\ 2\sin\beta+3\cos^2\beta=-3\sin^2\beta+2\sin\beta+3\\
&=\ \frac{10}{3}-3\Big(\sin\beta-\frac{1}{3}\Big)^2\le\frac{10}{3},
\end{aligned}
$$

当且仅当 $\begin{cases}\sin(2\alpha+\beta)=1\\ \sin\beta=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3}\\ \beta=\arcsin\dfrac{1}{3}\end{cases}$, 也即 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\sqrt{2}$, $c=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 时, 原式取最小值 $\dfrac{10}{3}$. □

例 11 已知 $x,y\in\mathbb{R}$, 且 $x^2+y^2\le 1$, 则 $x+y-xy$ 的最大值为__________.

解. 解法 1. 设 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 其中 $0\le r\le 1$, $0\le\theta<2\pi$.

当 $r=0$ 时, 显然有 $x+y-xy=0$.

当 $0<r\le 1$ 时,

$$x+y-xy=r(\sin\theta+\cos\theta)-r^2\sin\theta\cos\theta.$$

设 $\sin\theta+\cos\theta=t$ $(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2})$, 则 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$, 于是

$$x+y-xy=rt-\frac{r^2}{2}(t^2-1)=\frac{r^2+1}{2}-\frac{r^2}{2}\Big(t-\frac{1}{r}\Big)^2\le\frac{r^2+1}{2}\le 1,$$

当且仅当 $r=1$ 且 $t=1$, 即 $(x,y)=(1,0)$ 或$(0,1)$ 时, $(x+y-xy)_{\max}=1$.

解法 2. 设 $x+y=t$, 则 $t^2=x^2+y^2+2xy\le 1+2xy$, 即 $xy\ge\dfrac{t^2-1}{2}$, 因此

$$x+y-xy\le t-\frac{t^2-1}{2}=1-\frac{(t-1)^2}{2}\le 1.$$

□

例 12 设 $x,y\in\mathbb{R}$, 且 $4x^2-5xy+4y^2=5$. 记 $S=x^2+y^2$, 则 $\dfrac{1}{S_{\min}}+\dfrac{1}{S_{\max}}=$_____.

解. 由 $S=x^2+y^2$, 可设 $x^2=\dfrac{S}{2}+t$, $y^2=\dfrac{S}{2}-t$, 代入 $4x^2-5xy+4y^2=5$ 中, 整理可得到

$$(4S-5)^2=25\Big(\frac{S^2}{4}-t^2\Big),$$

于是

$$39S^2-160S+100=-100t^2\le 0,$$

解出 $\dfrac{10}{13}\le S\le\dfrac{10}{3}$. 经检验知, 当且仅当 $x=y$ 时, $S=\dfrac{10}{3}$; $x=-y$ 时, $S=\dfrac{10}{13}$. □

例 13 已知 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 满足

$$\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}=2,$$

求 $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}$ 的最大值.

解. 由条件知

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}=1,$$

再由 Cauchy 不等式知

$$\begin{aligned}2&=\Big(\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}\Big)\Big(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\Big)\\&\ge\Big(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\Big)^2.\end{aligned}$$

因此所求的最大值为 $\sqrt{2}$. □

例 14 已知 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, $abc=1$, 求 $S=\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{1}{2b+1}+\dfrac{1}{2c+1}$ 的最小值.

解. 设 $a=\dfrac{x}{y}$, $b=\dfrac{y}{z}$, $c=\dfrac{z}{x}$, 其中 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 得

$$S=\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}.$$

由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}&(x+y+z)^2S\\=&\Big(y(2x+y)+z(2y+z)+x(2z+x)\Big)\Big(\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\Big)\\\ge&(x+y+z)^2,\end{aligned}$$

故 $S\ge 1$. 当 $x=y=z$ 即 $a=b=1$ 时 $S=1$. 所以 S 的最小值为 1. □

例 15 (1) 设 $m>0$, $n>0$, $m+n=1$, 求证: $\Big(m+\dfrac{1}{m}\Big)^2+\Big(n+\dfrac{1}{n}\Big)^2\ge\dfrac{25}{2}$.

(2) 已知 $\sin\theta+2\cos\theta=1$, 求 $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$.

解. (1) 设 $m=\dfrac{1}{2}-d$, $n=\dfrac{1}{2}+d$, 其中 $|d|<\dfrac{1}{2}$, 则

$$\begin{aligned}\Big(m+\frac{1}{m}\Big)^2+\Big(n+\frac{1}{n}\Big)^2&\ge 2\Big(m+\frac{1}{m}\Big)\Big(n+\frac{1}{n}\Big)\\&=\frac{8d^4+12d^2+\dfrac{25}{2}}{1-4d^2}\ge\frac{25}{2}.\end{aligned}$$

(2) 设 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}-d$, $2\cos\theta=\dfrac{1}{2}+d$, 再由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 得

$$\big(\frac{1}{2}-d\big)^2+\big(\frac{1}{4}+\frac{d}{2}\big)^2=1,$$

故 $d=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{11}{10}$, 因此

$$\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{1-6d}{3-2d}=1\text{ 或 }-7.$$ □

例16 (1) 已知正数 x, y 满足 $x+2y=1$, 求证: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 3+2\sqrt{2}$.

(2) 已知正数 a, b 满足 $a+b=1$, 求证: $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}$ 的最大值是 $2\sqrt{2}$.

解. (1) 对任意的 $\lambda>0$, 都有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda(x+2y-1)\\&=\left(\frac{1}{x}+\lambda x\right)+\left(\frac{1}{y}+2\lambda y\right)-\lambda\\&\ge 2\sqrt{\lambda}+2\sqrt{2\lambda}-\lambda=3+2\sqrt{2}-\left(\sqrt{\lambda}-\sqrt{2}-1\right)^2,\end{aligned}$$

所以, 当 $\sqrt{\lambda}=\sqrt{2}+1$, $x=\sqrt{2}-1$, $y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 取最小值 $3+2\sqrt{2}$.

(2) 对任意的 $\lambda>0$, 都有

$$\begin{aligned}\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}&=\frac{1}{\lambda}\left(\lambda\sqrt{2a+1}+\lambda\sqrt{2b+1}\right)\\&\le\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda^2+2a+1}{2}+\frac{\lambda^2+2b+1}{2}\right)=\lambda+\frac{2}{\lambda},\end{aligned}$$

即 $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\le\lambda+\frac{2}{\lambda}$, 当且仅当 $\lambda=\sqrt{2a+1}=\sqrt{2b+1}$ 时取等号. 又 $a+b=1$, 所以当 $\lambda=\sqrt{2}$ 时, 可得当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}$ 取最大值 $2\sqrt{2}$. □

例17 设 x, y, z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $xy+2xz$ 的最大值.

解. 解法1. 设 $0<\lambda<1$, 由均值不等式得

$$1=x^2+y^2+z^2=(\lambda x^2+y^2)+\left((1-\lambda)x^2+z^2\right)\ge 2\sqrt{\lambda}xy+2\sqrt{1-\lambda}xz.$$

令 $2\sqrt{\lambda}:2\sqrt{1-\lambda}=1:2$, 得 $\lambda=\frac{1}{5}$, 进而可得

$$\begin{aligned}1=&x^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{5}x^2+y^2\right)+\left(\frac{4}{5}x^2+z^2\right)\\\ge&\frac{2}{\sqrt{5}}(|xy|+2|xz|)\ge\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2xz).\end{aligned}$$

因此

$$xy+2xz\le\frac{\sqrt{5}}{2},$$

当且仅当 $xy\ge 0$, $xz\ge 0$, $\frac{1}{5}x^2=y^2$, $\frac{4}{5}x^2=z^2$, $x^2+y^2+z^2=1$ 时等号成立.

所以当 $(x,y,z)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ 时, $xy+2xz$ 取最大值 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

解法 2. 可设 $x=\sin\theta$, $y=\cos\theta\cos\varphi$, $z=\cos\theta\sin\varphi$, 其中 $\theta,\varphi\in\mathbb{R}$, 则

$$xy+2xz=\sin 2\theta\Big(\sin\varphi+\frac{1}{2}\cos\varphi\Big)\le\frac{\sqrt{5}}{2},$$

当且仅当$\begin{cases}\sin 2\theta=1\\ \sin\varphi+\dfrac{1}{2}\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}$ 时等号成立. 所以当 $(x,y,z)=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{5}\Big)$ 或 $\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{\sqrt{10}}{5}\Big)$ 时, $xy+2xz$ 取到最大值 $\frac{\sqrt{5}}{2}$. □

例 18 设实数 x,y 满足 $3\le xy^2\le 8$, $4\le\frac{x^2}{y}\le 9$, 求 $\frac{x^3}{y^4}$ 的取值范围.

解. 由 $\frac{x^3}{y^4}=\Big(\frac{x^2}{y}\Big)^2\Big(\frac{1}{xy^2}\Big)$, 以及所给的不等式, 得

$$2=4^2\cdot\frac{1}{8}\le\frac{x^3}{y^4}\le 9^2\cdot\frac{1}{3}=27.$$ □

例 19 设 $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{1}{2}\Big(x+\frac{1}{x}\Big)$, 求 g 的值域.

解. 若 $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 因 x 与 $\frac{1}{x}$ 同号, 故由三角不等式和均值不等式, 可得

$$|g(x)|=\Big|\frac{1}{2}\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\Big|=\frac{1}{2}\Big(|x|+\Big|\frac{1}{x}\Big|\Big)\ge 1,$$

因此 $R_g\subseteq(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

若 $z\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, 即 $|z|\ge 1$, 令 $x=z+\sqrt{z^2-1}$, 则 $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 且

$$g(x)=\frac{1}{2}\Big(z+\sqrt{z^2-1}+\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\Big)=z,$$

故 $z\in R_g$. 因此 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\subseteq R_g$.

综上有 $R_g=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,

例 20 设实数 x,y 满足 $x^2+2xy-1=0$, 求 $x+y$ 的取值范围.

解. 问题可重述为: 设

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x^2+2xy-1=0\},$$

$$f:D\to\mathbb{R},\quad (x,y)\to x+y,$$

求 f 的值域.

解法 1. 首先

$$\begin{aligned}D&=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x^2+2xy-1=0\}\\&=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x\ne 0,\ x^2+2xy=1\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x \neq 0,\ y = \frac{1-x^2}{2x}\right\} \\
&= \left\{\left(x, \frac{1-x^2}{2x}\right) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x \neq 0\right\},
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
f(D) &= \{z \in \mathbb{R} : \text{存在 } (x,y) \in D \text{ 使得 } z = x+y\} \\
&= \left\{z \in \mathbb{R} : \text{存在 } x \in \mathbb{R} \text{ 使得 } \ x \neq 0, \quad z = x + \frac{1-x^2}{2x}\right\} \\
&= \left\{x + \frac{1-x^2}{2x} : x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}.
\end{aligned}
$$

设 $g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 则 $R_f = R_g$.

若 $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, 因 x 与 $\frac{1}{x}$ 同号, 故由均值不等式, 可得

$$
|g(x)| = \left|\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right| = \frac{1}{2}\left(|x| + \left|\frac{1}{x}\right|\right) \geq 1,
$$

因此 $R_g \subseteq (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.

若 $z \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$, 即 $|z| \geq 1$, 令 $x = z + \sqrt{z^2-1}$, 则 $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, 且

$$
g(x) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2-1} + \frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\right) = z,
$$

故 $z \in R_g$. 因此 $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \subseteq R_g$.

综上有 $R_g = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$, 所以 $R_f = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$. □

解法 2. 因 $x \neq 0$, 故可解出 $y = \frac{1-x^2}{2x}$, 因此 $x+y = x + \frac{1-x^2}{2x} = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

所以 $x+y$ 的取值范围是 $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$. □

例 21 设实数 x, y 满足 $x^2 - 3xy + y^2 = 2$, 求 $x^2 + y^2$ 的取值范围.

解. 令 $x = u+v$, $y = u-v$, 则 $x^2+y^2 = 2(u^2+v^2)$, $5v^2 - u^2 = 2$.

由 $5(v^2+u^2) = (5v^2-u^2) + 6u^2 = 2 + 6u^2 \geq 2$, 得 $u^2+v^2 \geq \frac{2}{5}$.

因此有 $x^2+y^2 = 2(u^2+v^2) \geq \frac{4}{5}$ (当 $u=0$ 时取等号).

所以 $x_2 + y^2$ 取值范围是 $\left[\frac{4}{5}, +\infty\right)$. □

例 22 设实数 x, y 满足 $x^2 - xy + y^2 = 1$, 求 $x^2 - y^2$ 的取值范围.

解. 为消去交叉项仍做替换 $x = u+v$, $y = u-v$, 则 $u^2 + 3v^2 = 1$,

$$
x^2 - y^2 = 4uv.
$$

再设 $u=\cos t$, $v=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t$, 则

$$x^2-y^2=4uv=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t\cos t=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 2t.$$

所以 x^2-y^2 的取值范围是 $\Big[-\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big]$. □

例 23 求函数 $f(x)=\dfrac{x^4-8x^3+23x^2-28x+21}{x^2-4x+4}$ $(|x|\le 1)$ 的值域.

解. 由 $x^4-8x^3+23x^2-28x+21=(x-2)^4-(x-2)^2+9$ 知

$$f(x)=(x-2)^2+\frac{9}{(x-2)^2}-1.$$

由 $|x|\le 1$ 知 $1\le(x-2)^2\le 9$. 因此 $f(x)$ 的值域为 $[5,9]$. □

例 24 若正数 x, y 满足 $\dfrac{7x-9y}{xy+y^2}=x$, 则 y 的范围是________.

解. 由条件得 $(x^2+9)y=x(7-y^2)$, 故

$$\frac{7-y^2}{y}=\frac{x^2+9}{x}\ge 6.$$

得 $0<y\le 1$. □

例 25 若正数 x, y 满足 $x+\dfrac{2}{x}+3y+\dfrac{4}{y}=10$, 则 xy 的范围是__________, $\dfrac{y}{x}$ 的范围是__________.

解. 解法 1. 由均值不等式知

$$10=\Big(x+\frac{4}{y}\Big)+\Big(3y+\frac{2}{x}\Big)\ge 2\sqrt{\Big(x+\frac{4}{y}\Big)\Big(3y+\frac{2}{x}\Big)}=2\sqrt{3xy+\frac{8}{xy}+14},$$

故 $3xy+\dfrac{8}{xy}+14\le 25$, 因此 $1\le xy\le\dfrac{8}{3}$.

当且仅当 $x+\dfrac{4}{y}=3y+\dfrac{2}{x}=5$, 即 $(x,y)=(1,1)$ 时 $xy=1$; 当且仅当 $(x,y)=\big(2,\dfrac{4}{3}\big)$ 时 $xy=\dfrac{8}{3}$.

仍由均值不等式知

$$10=(x+3y)+\Big(\frac{2}{x}+\frac{4}{y}\Big)\ge 2\sqrt{(x+3y)\Big(\frac{2}{x}+\frac{4}{y}\Big)}=2\sqrt{\frac{6y}{x}+\frac{4x}{y}+14},$$

故 $\dfrac{6y}{x}+\dfrac{4x}{y}\le 11$, 得 $6\Big(\dfrac{y}{x}\Big)^2-11\Big(\dfrac{y}{x}\Big)+4\le 0$, 因此 $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{y}{x}\le\dfrac{4}{3}$.

解法 2. 设 $xy=t$ $(t>0)$, 即 $y=\dfrac{t}{x}$. 由题设, 得 $\Big(1+\dfrac{4}{t}\Big)x+\dfrac{2+3t}{x}=10$, 即

$$(t+4)x^2-10tx+(3t^2+2t)=0.$$

因 $t>0$, 故上述关于 x 的方程是二次方程, 并且其两根之积, 之和, 均为正数, 因此

$$(-10t)^2-4(t+4)(3t^2+2t)\ge 0.$$

由此可解出 $1 \le t \le \dfrac{8}{3}$. □

例 26 若实数 x, y 满足 $x - 4\sqrt{y} = 2\sqrt{x-y}$, 则 x 的范围是__________.

解. 设 $\sqrt{y} = a\ (a \ge 0)$, $\sqrt{x-y} = b\ (b \ge 0)$, 则 $x = a^2 + b^2$, 并且

$$a^2 + b^2 - 4a = 2b,$$

即

$$(a-2)^2 + (b-1)^2 = 5, \quad a \ge 0, \quad b \ge 0.$$

注意 $a^2 + b^2$ 表示圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 上的点 (a, b) 到原点距离的平方, 所以 x 的取值范围是 $\{0\} \cup (4, 20]$. □

例 27 若实数 x, y 满足 $x^2 + xy - 2y^2 = 1$, 求 $S = 3x^2 - y^2$ 的范围.

解. 因 $(x+2y)(x-y) = 1$, 故令 $x + 2y = m$, $x - y = n$, 则 $mn = 1$, $x = \dfrac{m+2n}{3}$, $y = \dfrac{m-n}{3}$, 因此, 由均值不等式得

$$S = \frac{2}{9}m^2 + \frac{11}{9}n^2 + \frac{14}{9}mn \ge \frac{2\sqrt{22}}{9}mn + \frac{14}{9}mn = \frac{2\sqrt{22}}{9} + \frac{14}{9},$$

当且仅当 $\sqrt{2}m = \sqrt{11}n$ 且 $mn = 1$ 时取等号. □

例 28 若 a, b 满足 $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$, 求 $a^2 + b^2$ 的取值范围.

解. 由 Cauchy 不等式知

$$1 = \left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)^2 \le (a^2 + 1 - a^2)(b^2 + 1 - b^2) = 1.$$

由取等条件知 $\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2} = ab$, 整理即得 $a^2 + b^2 = 1$. □

§ 5.5 不等式中的参数

1. 含参数的不等式: 利用函数的定义域和单调性来进行分类讨论.

2. 不等式恒成立, 能成立, 恰成立的问题: 用函数或方程的思想, 通过分离变量转化为最值问题, 也可以根据不等式的特征利用数形结合法.

   (1) 恒成立问题

   $$\text{(i)}\ f(x) \geq \lambda \text{ 对 } x \in D \text{ 恒成立} \iff \lambda \leq \inf_{x \in D} f(x).$$
   $$\text{(ii)}\ f(x) \leq \lambda \text{ 对 } x \in D \text{ 恒成立} \iff \lambda \geq \sup_{x \in D} f(x).$$

   (2) 能成立问题

   $$\text{(i)}\ \text{存在 } x_0 \in D \text{ 使 } f(x_0) > \lambda \text{ 成立} \iff \sup_{x \in D} f(x) > \lambda.$$
   $$\text{(ii)}\ \text{存在 } x_0 \in D \text{ 使 } f(x_0) < \lambda \text{ 成立} \iff \inf_{x \in D} f(x) < \lambda.$$

   ♣ 若 f 在 D 上有最大值和最小值, 则

   $$\text{(iii)}\ \text{存在 } x_0 \in D \text{ 使 } f(x_0) \geq \lambda \text{ 成立} \iff \lambda \leq \max_{x \in D} f(x).$$
   $$\text{(iv)}\ \text{存在 } x_0 \in D \text{ 使 } f(x_0) \leq \lambda \text{ 成立} \iff \lambda \geq \min_{x \in D} f(x).$$

   (3) 恰成立问题

   $$f(x) > \lambda \text{ 恰在区间 } D \text{ 上成立} \iff f(x) > \lambda \text{ 的解集为 } D.$$

例 1 求使得关于 x 的不等式 $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x} \geq k$ 有解的实数 k 的最大值.

解. 设 $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}$, 由 Cauchy 不等式知

$$(f(x))^2 \leq ((x-3)+(6-x)) \cdot (1+1) = 6,$$

当 $x=\dfrac{9}{2}$ 时等号成立, 故 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{6}$.

所以使得 $f(x) \geq k$ 有解的 k 的最大值为 $\sqrt{6}$. □

例 2 设对任意 $x, y \in \mathbb{R}^+$, 不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq a\sqrt{x+y}$ 都成立, 求 a 的最小值,

解. 由均值不等式知

$$\Big(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\Big)^2 \leq 2\Big(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}\Big) = 2,$$

当且仅当 $x=y$ 时等号成立, 故 k 的最小值为 $\sqrt{2}$. □

例3 设 x,y,z 是直角三角形的三边长, 且 z 是斜边长. 当不等式

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\geq kxyz$$

恒成立时, 求参数 k 的最大值, 并指出何时等号成立.

解. 不妨设 $z=1$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, 以及 $x\geq y$, 即 $0<t\leq\dfrac{\pi}{4}$. 记 $p=\sin t+\cos t$, 则 $1<p\leq\sqrt{2}$, 因此

$$\begin{aligned}\frac{x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)}{xyz}&=\frac{2+(\sin t+\cos t)(2+2\sin t\cos t)}{2\sin t\cos t}\\&=\frac{2+p(2+p^2-1)}{p^2-1}\\&=(p-1)+\frac{2}{p-1}+1\\&\geq(\sqrt{2}-1)+\frac{2}{\sqrt{2}-1}+1\\&=2+3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

当且仅当 $\sin t+\cos t=\sqrt{2}$, 即 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时等号成立. 所以 k 的最大值为 $2+3\sqrt{2}$. □

例4 若 $a,b,c,k\in\mathbb{R}^+$, 且 $\dfrac{kabc}{a+b+c}\geq(a+b)^2+(a+b+4c)^2$, 求 k 的最小值.

解. 由均值不等式, 得 $a+b+c=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{b}{2}+c\geq5\sqrt[5]{\dfrac{a^2b^2c}{16}}$, 以及

$$\begin{aligned}(a+b)^2+(a+b+4c)^2&=(a+b)^2+((a+2c)+(b+2c))^2\\&\geq(2\sqrt{ab})^2+(2\sqrt{2ac}+2\sqrt{2bc})^2\\&=4(ab+2ac+2bc+2c\sqrt{ab}+2c\sqrt{ab})\\&\geq20\sqrt[5]{16a^3b^3c^4}.\end{aligned}$$

因此有

$$\frac{((a+b)^2+(a+b+4c)^2)\cdot(a+b+c)}{abc}\geq100,$$

当且仅当 $a=b=2c$ 时等号成立. 所以 k 的最小值为 100. □

例5 如果关于 x 的不等式 $ax^2-|x+1|+2a<0$ 的解集为空集, 求 a 的取值范围.

解. 首先, 不等式 $ax^2-|x+1|+2a<0$ 的解集为空集 $\iff$ 对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $ax^2-|x+1|+2a\geq0$, 即 $a\geq\dfrac{|x+1|}{x^2+2}$. 所以 $a\geq\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left\{\dfrac{|x+1|}{x^2+2}\right\}$.

记 $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x^2+2}$, 则 $f(-1)=0$. 当 $x\neq -1$ 时, $f(x)\neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)}&=\frac{(x+1)^2-2(x+1)+3}{|x+1|}\\&=|x+1|+\frac{3}{|x+1|}-2\frac{x+1}{|x+1|}\\&\geq |x+1|+\frac{3}{|x+1|}-2\\&\geq 2(\sqrt{3}-1).\end{aligned}$$

所以 $f(x)\leq \dfrac{1}{2(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$. 而 $f(\sqrt{3}-1)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$, 故 f 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$, 因此 a 的取值范围是 $\Big[\dfrac{\sqrt{3}+1}{4},\ +\infty\Big)$. □

例 6 设实数 a 使不等式 $|2x-a|+|3x-2a|\geq a^2$ 对任意的 x 恒成立, 求满足条件的 a 组成的集合 A.

解. 显然 $0\in A$. 当 $a\neq 0$ 时, 设 $x=ka$, 则对任意的 $k\in\mathbb{R}$, 恒有不等式

$$|2k-1|+|3k-2|\geq |a|.$$

所以 $|a|\leq \dfrac{1}{3}$. 综上, $A=\Big[-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\Big]$. □

例 7 若 $x\in[-1,1]$ 时, $ax^3-3x+1\geq 0$ 恒成立, 求 a 的范围.

解. (解法 1) 设 $x=\sin\alpha$. 由 $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ 得

$$(4-a)\sin^3\alpha\leq 1-\sin 3\alpha$$

恒成立.

取 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, 得 $a\geq 4$; 取 $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$, 得 $a\leq 4$. 所以必须有 $a=4$.

反过来还可验证 $a=4$ 时, 上式恒成立.

(解法 2) 设 $0<x\leq 1$, 则 $a\geq \dfrac{3x-1}{x^3}$, 因此对任意的 $t\geq 1$ 都有 $a\geq t^2(3-t)$, 故 $a\geq \sup\limits_{t\geq 1}t^2(3-t)$. 由均值不等式知 $t^2(3-t)=4\cdot\dfrac{t}{2}\cdot\dfrac{t}{2}(3-t)\leq 4$, 且当 $t=2$ 时等号成立, 故 $\sup\limits_{t\geq 1}t^2(3-t)=4$. 所以 $a\geq 4$.

另一方面, 对任意的 $t\geq 1$ 都有 $-1\leq -\dfrac{1}{t}<0$, 故 $a\Big(-\dfrac{1}{t}\Big)^3-3\Big(-\dfrac{1}{t}\Big)+1\geq 0$, 因此 $a\leq 3t^2+t^3$, 再由单调性知 $a\leq \inf\limits_{t\geq 1}(3t^2+t^3)=4$.

综上应有 $a=4$. 最后验证 $a=4$ 满足要求. □

例 8 设 $x>0$, $a>0$, 求使不等式 $\sqrt{1+x}\geq 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{a}$ 成立的 a 的最大值.

解. 设 $\sqrt{1+x}=t$, 其中 $t>1$, 则 $x=t^2-1$. 题中不等式即

$$t-1\geq\frac{t^2-1}{2}-\frac{(t^2-1)^2}{a},$$

即

$$1\geq\frac{t+1}{2}-\frac{(t-1)(t+1)^2}{a},$$

就是

$$\frac{t-1}{2}\leq\frac{(t-1)(t+1)^2}{a},$$

也就是

$$\frac{1}{2}\leq\frac{(t+1)^2}{a}.$$

因为上式对任意的 $t>1$ 恒成立, 所以 $a>0$, 且 $a\leq 2(t+1)^2$ 对任意的 $t>1$ 恒成立.

所以 a 最大值为 8. □

例 9 已知不等式

$$\sqrt{2}(2a+3)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{6}{\sin\theta+\cos\theta}-2\sin 2\theta\leq 3a+6$$

对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立, 求 a 的范围.

解. 记 $x=\cos\theta+\sin\theta$, 则 $\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=x$, $\sin 2\theta=x^2-1$, 因此问题的条件可改写为: 不等式

$$(2a+3)x+\frac{6}{x}-2(x^2-1)\leq 3a+6$$

对 $x\in[1,\sqrt{2}]$ 恒成立. 因 $3-2x>0$, 故上式即为 $a\geq x+\frac{2}{x}$.

因 $\max\limits_{x\in[1,\sqrt{2}]}\left\{x+\frac{2}{x}\right\}=3$, 故 a 的取值范围为 $[3,+\infty)$. □

例 10 设 a,b,c 都是正数, 且 $a+b+c=\lambda$, 若不等式

$$\frac{1}{a(1+\lambda b)}+\frac{1}{b(1+\lambda c)}+\frac{1}{c(1+\lambda a)}\geq\frac{27}{4}$$

恒成立, 求 λ 的范围.

解. 由 Cauchy 不等式得

$$\left(\frac{1}{a(1+\lambda b)}+\frac{1}{b(1+\lambda c)}+\frac{1}{c(1+\lambda a)}\right)\Big(a(1+\lambda b)+b(1+\lambda c)+c(1+\lambda a)\Big)\geq 9.$$

因

$$\lambda^2=(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)\geq 3(ab+bc+ca),$$

故

$$a(1+\lambda b)+b(1+\lambda c)+c(1+\lambda a)=(a+b+c)+\lambda(ab+bc+ca)\leq \lambda+\frac{\lambda^3}{3}.$$

因此

$$\frac{1}{a(1+\lambda b)}+\frac{1}{b(1+\lambda c)}+\frac{1}{c(1+\lambda a)}\geq \frac{27}{3\lambda+\lambda^3},$$

并且当 $a=b=c=\dfrac{\lambda}{3}$ 时等号成立. 所以, 为使题中的不等式恒成立, 必须且只需 $\lambda>0$ 且 $\dfrac{27}{3\lambda+\lambda^3}\geq\dfrac{27}{4}$. 因此 λ 的取值范围是 $(0,1]$. □

例 11 已知 $a\in(0,1)$, 试确定 t 的取值范围, 使不等式 $ax^2+ty^2\geq(ax+ty)^2$ 对任意实数 x,y 都成立.

解. 不等式可变形为 $a(1-a)x^2-(2aty)x+t(1-t)y^2\geq 0$. 利用二次函数性质知, 为使不等式对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$ 都成立, 必须且只需: 对任意的 $y\in\mathbb{R}$, 都有

$$(2aty)^2-4a(1-a)t(1-t)y^2\leq 0.$$

这等价于 $4a^2t^2-4a(1-a)t(1-t))\leq 0$, 即

$$t(t-(1-a))\leq 0.$$

所以 t 的取值范围是 $[0,1-a]$. □

例 12 已知 $f(x)=\log_a\left(x+\dfrac{a}{x}-4\right)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 求 a 的取值范围.

解. 首先 $a>0$ 且 $a\neq 1$. f 的定义域为

$$\begin{aligned}D_f&=\left\{x\,\middle|\,x\neq 0,\ x+\frac{a}{x}-4>0\right\}\\&=\left\{x\,\middle|\,x>0,\ x+\frac{a}{x}-4>0\right\}\\&=\begin{cases}(0,2-\sqrt{4-a})\cup(2+\sqrt{4-a},+\infty), & a\leq 4,\\(0,+\infty), & a>4.\end{cases}\end{aligned}$$

注意, f 的值域为 $\mathbb{R}\iff g(x)=x+\dfrac{a}{x}-4\ (x\in D_f)$ 的值域 R_g 为 $(0,+\infty)$.

当 $a\leq 4$ 时, $R_g=(0,+\infty)$. 当 $a>4$ 时, $R_g=[2\sqrt{a}-4,+\infty)\neq\mathbb{R}$.

所以 a 的范围是 $(0,1)\cup(1,4]$. □

例13 定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的函数 f 满足

(i) 存在 $a>1$ 使得 $f(a)\neq 0$,

(ii) 对任意的 $b\in\mathbb{R}$, 有 $f(x^b)=bf(x)$.

若方程 $f(mx)f(mx^2)=4(f(a))^2$ 的所有解大于 1, 求 m 的取值范围.

解. 取定一个 $a>1$ 使得 $f(a)\neq 0$. 根据 (2) 就有 $f(x)=f(a^{\log_a x})=f(a)\log_a x$, 于是所给的方程为 $f(a)\log_a(mx)\cdot f(a)\log_a(mx^2)=4(f(a))^2$, 即

$$\big(\log_a m+\log_a x\big)\big(\log_a m+2\log_a x\big)=4.$$

记 $\log_a m=n$, $\log_a x=y$, 则方程变为

$$2y^2+3ny+n^2-4=0.$$

因关于 x 方程的解都大于 1, 意味着关于 y 的方程的解都是正数, 因此有

$$(3n)^2-8(n^2-4)\geq 0,\quad -\frac{3n}{2}>0,\quad \frac{n^2-4}{2}>0.$$

解出 $n<-2$. 所以 m 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{a^2}\right)$. □

例14 设关于 x 的不等式 $\lg^2 x-(2+m)\lg x+(m-1)>0$ 对于 $|m|\leq 1$ 恒成立, 求 x 的范围.

解. 记 $\lg x=y$, 则不等式变为 $y^2-(2+m)y+(m-1)>0$.

记 $f(m)=(1-y)m+(y^2-2y-1))$, 则当 $m\in[-1,1]$ 时 $f(m)>0$ 恒成立.

这就意味着 $f(-1)>0$, $f(1)>0$, 即 $y^2-y-2>0$, $y^2-3y>0$.

解出 $y<-1$ 或 $y>3$, 进而得 x 的范围是 $\left(0,\dfrac{1}{10}\right)\cup(10^3,+\infty)$. □

例15 求使不等式 $\sin^2 x+a\cos x+a^2\geq 1+\cos x$ 对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立的负数 a 的范围.

解. 不等式可变形为

$$\left(\cos x+\frac{1-a}{2}\right)^2\leq a^2+\frac{(a-1)^2}{4}.$$

因为 $a<0$, 故 $\left(\cos x+\dfrac{1-a}{2}\right)^2$ 在 $\cos x=1$ 时取得最大值 $\left(1+\dfrac{1-a}{2}\right)^2$. 所以

$$\left(1+\frac{1-a}{2}\right)^2\leq a^2+\frac{(a-1)^2}{4}.$$

解出 $a\leq -2$. □

例16 设 $x,y\in\mathbb{R}^+$, 且 $x+y=k$, 求使

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\geq\left(\frac{k}{2}+\frac{2}{k}\right)^2$$

恒成立的 k 的范围.

解. 若 $x=y=\dfrac{k}{2}$, 则不等式成为等号. 下面考虑 $x\neq y$ 的情形, 不妨设 $x>y$.

记 $m=\dfrac{k}{2}$, $x=m+t$, $y=m-t$, 其中 $0<t<m$. 于是不等式变为

$$\left(m+t+\frac{1}{m+t}\right)\left(m-t+\frac{1}{m-t}\right)\geq\left(m+\frac{1}{m}\right)^2,$$

经化简整理可得

$$t^2\geq\frac{m^4-4m^2-1}{m^2}.$$

此式对任意的 $t\in(0,m)$ 都成立的充要条件是 $m^4-4m^2-1\leq 0$. 再注意 $m>0$, 就得到 m 的取值范围是 $(0,\sqrt{2+\sqrt{5}})$, 因此 k 的范围是 $(0,2\sqrt{2+\sqrt{5}})$. □

例17 若对任意的 $x\in\left[\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{3}\right]$, 不等式 $|a-\ln x|>\ln\dfrac{3x+2}{3}$ 恒成立, 求 a 的范围.

解. 先考虑反面: 若存在 $x\in\left[\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{3}\right]$, 使 $|a-\ln x|\leq\ln\dfrac{3x+2}{3}$成立, 求 a 的范围.

由 $|a-\ln x|\leq\ln\dfrac{3x+2}{3}$, 得 $\ln\dfrac{3x+2}{3}\geq 0$, 故 $x\geq\dfrac{1}{3}$.

再由 $x\in\left[\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right]$ 得 $x=\dfrac{1}{3}$, 因此 $a=-\ln 3$.

所以 a 的范围是 $(-\infty,-\ln 3)\cup(-\ln 3,+\infty)$. □

例18 设 $M=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{x^2+mx+4}{x^2-x+4},\ x\leq 1\right\}$.

(1) 若任取 $a,b,c\in M$, 都可使以 a, b, c 为长度的线段能够成为一个三角形的三边, 求 m 的范围.

(2) 若存在 $a,b,c\in M$, 可使以 a, b, c 为长度的线段不能成为一个三角形的三边, 求 m 的范围.

解. (1) 注意到

$$y=1+\frac{(m+1)x}{x^2-x+4}=1+\frac{m+1}{x+\dfrac{4}{x}-1}\quad(x\leq 1,\ x\neq 0).$$

若 $x\leq 1$, $x\neq 0$, 则 $x+\dfrac{4}{x}\leq -4$, 或 $x+\dfrac{4}{x}\geq 5$; 即 $x+\dfrac{4}{x}-1\leq -5$ 或 $x+\dfrac{4}{x}-1\geq 4$. 因此, 当 $x\leq 1$ 时, 总有

$$-\frac{1}{5}\leq\frac{x}{x^2-x+4}\leq\frac{1}{4}.$$

所以当 $m \geq -1$ 时, $M = \left[\frac{4-m}{5},\ \frac{5+m}{4}\right]$, 当 $m < -1$ 时, $M = \left[\frac{5+m}{4},\ \frac{4-m}{5}\right]$.

依题意知, 任取 $a, b, c \in M$, 都使 $a + b > c$ 恒成立, 即

$$2 \cdot y_{\min} > y_{\max},$$

也就是

$$\begin{cases} m \geq -1 \\ \dfrac{4-m}{5} > 0 \\ 2 \cdot \dfrac{4-m}{5} > \dfrac{5+m}{4} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} m < -1 \\ \dfrac{5+m}{4} > 0 \\ 2 \cdot \dfrac{5+m}{4} > \dfrac{4-m}{5} \end{cases}$$

解得 $-1 \leq m < \frac{7}{13}$ 或 $-\frac{17}{7} < m < -1$, 故所求范围为 $\left(-\frac{17}{7}, \frac{7}{13}\right)$.

(2) 所求即为 (1) 的补集. □

例 19 已知 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + x$ 满足 $f(3) = 3$, $f(x) \geq x$, 求 a, b.

解. 由 $f(3) = 3$ 得 $b = -(3a+9)$, 因此

$$f(x) = x^4 + ax^3 - (3a+9)x^2 + x.$$

因对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x) \geq x$, 即

$$x^2(x^2 + ax - 3a - 9) \geq 0,$$

所以当 $x \neq 0$ 时, 总有

$$x^2 + ax - 3a - 9 \geq 0.$$

据此可知 $a^2 + 4(3a+9) \leq 0$, 即 $(a+6)^2 \leq 0$. 所以 $a = -6$, $b = 9$. □

第六章　数列

§ 6.1　数列的基本性质

设 $E \subseteq \mathbb{C}$. 映射 $f : \{1, 2, \cdots, m\} \to E$ 称为 E 中的**有限数列**, 映射 $f : \mathbb{N}^+ \to E$ 称为 E 中的**无穷数列**. E 中的有限数列和无穷数列统称为 E 中的**数列**.

如非特别指出, 数列都是指无穷数列.

通常将 $f(k)$ 记为 f_k, 将数列 f 记为 $\{f_k\}$. 称 f_k 为数列的**第 k 项**或**通项**. 称 $\sum\limits_{j=1}^{k} f_j$ 为数列 f 的**前 k 项和**或**部分和**.

通常, 把 $\mathbb{C}$ 中的数列称为**复数列**, 把 $\mathbb{R}$ 中的数列称为**实数列**, $\mathbb{Q}$ 中的数列称为**有理数列**, $\mathbb{N}^*$ 中的数列称为**正整数列**, 等等.

若 a, b, c 满足 $a + c = 2b$, 则称 a, b, c 是**等差的**. 若 a, b, c 都非零且满足 $ac = b^2$, 则称 a, b, c 是**等比的**.

若数列 $\{a_k\}$ 中任意连续的三项 a_j, a_{j+1}, a_{j+2} 都是等差的, 则称 $\{a_k\}$ 是**等差数列**, 此时, 称 $a_2 - a_1$ 为该等差数列的**公差**.

若数列 $\{a_k\}$ 中任意连续的三项 a_j, a_{j+1}, a_{j+2} 都是等比的, 则称 $\{a_k\}$ 是**等比数列**, 此时, 称 $\dfrac{a_2}{a_1}$ 为该等比数列的**公比**.

性质 1 (等差数列和等比数列的基本性质)

(1) 若 $\{a_k\}$ 是公差为 d 的等差数列, 其前 n 项的和为 S_n, 则

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

(2) 若 $\{a_k\}$ 是公比为 q 的等比数列, 其前 n 项的和为 S_n, 则

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \qquad S_n = \begin{cases} \dfrac{a_1(1 - q^{n+1})}{1 - q}, & q \neq 1; \\ n a_1 & q = 1. \end{cases}$$

例1 设 $A, B \in \mathbb{C}$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = Ax + B$. 证明 $f\big|_{\mathbb{N}^*}$ 是等差数列.

例2 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 证明:

(1) 若 $S_n = An^2 + Bn$, 则 $\{a_n\}$ 是公差为 $2A$ 的等差数列.

(2) 若 $S_n = Aq^n - A$ (其中 $A \neq 0$, $q \neq 1$), 则 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.

例3 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = p$ (常数), 则 $\{a_n\}$ 是常数列.

解. 因为 $p = a_{n+1}^2 - a_n^2 = (dn + d + B)^2 - (dn + B)^2 = d(2dn + d + 2B)$, 所以 $d \cdot 2d = 0$, 即 $d = 0$. □

例4 设等差数列前 n 项和 $\{S_n\}$, 由以下条件分别求 S_{p+q}.

(1) $S_p = p$, $S_q = q$ $(p \neq q)$.

(2) $S_p = S_q$ $(p \neq q)$.

解. (1) 设 $S_n = An^2 + Bn$. 注意函数 $f(x) = Ax^2 + Bx$ 的图像过直线 $y = x$ 上的三个不同点 $(0, 0)$, (p, p), (q, q). 而抛物线不能经过同一直线上的互异三点, 故 $A = 0$, $B = 1$, 于是 $S_n = n$, $S_{p+q} = p + q$.

(2) 若 $A = 0$, 由 $S_p = S_q$, 可得 $S_n = 0$, 所以 $S_{p+q} = 0$.

若 $A \neq 0$, 由 $S_p = S_q$ 可得抛物线 $y = Ax^2 + Bx$ 的对称轴是直线 $x = \dfrac{p+q}{2}$, 所以 $f(p + q) = f(0) = 0$, 因此 $S_{p+q} = f(p + q) = 0$. □

例5 设等差数列的前 n 项和为 S_n, 若 $S_p = q$, $S_q = p$ $(p \neq q)$, 求 S_{p+q}.

解. 设 $S_n = An^2 + Bn$, 则
$$\begin{cases} Ap^2 + Bp = S_p = q, \\ Aq^2 + Bq = S_q = p, \end{cases}$$
故 $A(p + q) + B = -1$, 因此
$$S_{p+q} = (p + q)(A(p + q) + B) = -(p + q).$$
□

例6 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n, 由以下条件分别求出 S_n 取最大值时对应的 n.

(1) $a_1 > 0$, $S_4 = S_{12}$.

(2) $a_3 > 0$, $S_{12} > 0$, $S_{13} < 0$.

解. 设 $S_n = An^2 + Bn$ (公差 $d = 2A$).

(1) 若 $A=0$, 得 $S_n=Bn$. 又 $S_4=S_{12}$, 得 $B=0$, S_n 恒为 0, 这与 $a_1>0$ 矛盾.

若 $A>0$, 得公差 $d>0$. 又 $a_1>0$, 得 $\{a_n\}$ 各项均正, $S_4<S_{12}$, 与 $S_4=S_{12}$ 矛盾.

所以 $A<0$, $y=Ax^2+Bx$ 开口向下. 由 $S_4=S_{12}$ 知 $f(4)=f(12)$, 所以对称轴为 $x=8$, 最大值为 $f(8)$.

(2) 若 $A=0$, 则 $d=0$, $\{a_n\}$ 是常数列, $a_n=a_3>0$, $S_n=na_3>0$, 与 $S_{13}<0$ 矛盾.

若 $A>0$, 则 $d>0$, 又 $a_3>0$, 得 $a_{13}>0$, $S_{13}=S_{12}+a_{13}>0$, 矛盾.

所以 $A<0$, $y=Ax^2+Bx$ 开口向下, 且两个零点是 $0,t$ $(12<t<13)$. 所以其对称轴是直线 $x=\dfrac{t}{2}$ $\left(6<\dfrac{t}{2}<6.5\right)$. 故当 $n=6$ 时取最大值. □

例 7 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+n+4$. 证明数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列.

解. 若 $\{a_n\}$ 是以 q 为公比的等比数列, 则对任意正整数 n 都有

$$qa_n=a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+n+4,$$

故

$$n+4=\left(q-\frac{2}{3}\right)a_n=\left(q-\frac{2}{3}\right)\cdot a_1\,q^{n-1},$$

因此 $n+5=q(n+4)$, 即 $n(q-1)=1$. 矛盾. □

例 8 设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n, T_n, 且 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+2}{n+3}$, 求

(1) $\dfrac{a_5}{b_5}$, (2) $\dfrac{a_n}{b_n}$, (3) $\dfrac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}}$, (4) $\dfrac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}$,

(5) $\dfrac{a_2+a_5+a_{17}+a_{22}}{b_8+b_{10}+b_{12}+b_{16}}$, (6) $\dfrac{a_7}{b_9}$, (7) $\dfrac{\sqrt{3}a_1-a_9}{a_5+2b_7-b_4}$, (8) $\dfrac{2a_1^3-a_3^2b_5}{a_2b_7^2+b_3^3}$.

解.

(1) $\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{\frac{9}{2}(a_1+a_9)}{\frac{9}{2}(b_1+b_9)}=\dfrac{S_9}{T_9}=\dfrac{65}{12}$.

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{14n-5}{2n+2}$.

(3) $\dfrac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}}=\dfrac{3a_1+24d_1}{3b_1+24d_2}=\dfrac{a_1+8d_1}{b_1+8d_2}=\dfrac{a_9}{b_9}=\dfrac{S_{17}}{T_{17}}$.

(4) $\dfrac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\dfrac{a_1+a_{21}}{b_1+b_{21}}=\dfrac{S_{21}}{T_{21}}$.

(5) $\dfrac{a_2+a_5+a_{17}+a_{22}}{b_8+b_{10}+b_{12}+b_{16}}=\dfrac{2a_{12}+2a_{11}}{2b_{12}+2b_{11}}=\dfrac{a_1+a_{22}}{b_1+b_{22}}=\dfrac{S_{22}}{T_{22}}$.

(6) $\frac{a_7}{b_9}$. 解. 注意等差数列前 n 项有 "An^2+Bn" 的形式. 因 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+2}{n+3}$, 故存在 $K\neq 0$ 使得 $S_n=Kn(7n+2)$, $T_n=Kn(n+3)$ (♣ 思考: 为什么?), 进而得

$$a_n=K(14n-5),\quad b_n=K(2n+2), \tag{1}$$

所以 $\frac{a_7}{b_9}=\frac{93}{20}$.

(7) $\frac{\sqrt{3}a_1-a_9}{a_5+2b_7-b_4}=\frac{9\sqrt{3}-121}{65+32-10}=\frac{9\sqrt{3}-121}{87}$ (用 (1) 式).

(8) $\frac{2a_1^3-a_3^2b_5}{a_2b_7^2+b_3^3}=\frac{2\cdot 9^3-37^2\cdot 12}{23\cdot 16^2+8^3}$. □

例 9 对数列 $\{a_n\}$, 求证:

(1) 若 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$, 则 $a_{n+1}=(a_1-1)a_1a_2\cdots a_n+1$.

(2) 若 $a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n+1$, 则 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$ $(n\geq 2)$.

(3) 若 $a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n+1$, 则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$.

解. (1) 直接计算,

$$\begin{aligned}a_{n+1}-1&=a_n(a_n-1)=a_na_{n-1}(a_{n-1}-1)=\cdots\\&=a_na_{n-1}\cdots a_1(a_1-1).\end{aligned}$$

(2) 因 $a_{n+1}-1=a_1a_2\cdots a_n$, 故当 $n\geq 2$ 时

$$a_n-1=a_1a_2\cdots a_{n-1},$$

所以

$$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1).$$

(3) 因当 $n\geq 2$ 时有 $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$, 故

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n},$$

即

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}.$$ □

例10 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$, $a_3=2$, $a_na_{n+1}a_{n+2}\neq 1$. 又

$$a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3},$$

求 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$ 的值.

解. 由

$$a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3},$$

$$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}a_{n+4}=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4},$$

相减得

$$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}(a_{n+4}-a_n)=a_{n+4}-a_n,$$

故 $a_{n+4}=a_n$. 再由 $a_1=a_2=1$, $a_3=2$, 得 $a_4=4$. 所以

$$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=25(a_1+a_2+a_3+a_4)=200. \qquad \square$$

§ 6.2　数列的通项

例1 设至少四项的数列 $\{a_n\}$, 满足 $S_n=npa_n$ (p 为常数), 且 $a_1\neq a_2$. 求通项.

解. 解法一. 由 $a_1=S_1=pa_1$ 得 $p=1$ 或 $a_1=0$.

若 $p=1$, 则 $a_1+a_2=S_2=2a_2$, 故 $a_1=a_2$, 这与 $a_1\neq a_2$ 矛盾, 因此 $p\neq 1$, 所以 $a_1=0$, $a_2\neq 0$.

由 $a_2=S_2=2pa_2$, 得 $p=\dfrac{1}{2}$, 因此 $S_n=\dfrac{n}{2}a_n$.

由 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{n+1}{2}a_{n+1}-\dfrac{n}{2}a_n$, 得 $(n-1)a_{n+1}=na_n$.

将 $(n-1)a_{n+1}=na_n$ 和 $na_{n+2}=(n+1)a_{n+1}$ 两式相加得

$$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1},$$

故 $\{a_n\}$ 是等差数列. 再由 $a_1=0$, $d=a_2-a_1=a_2$, 得通项 $a_n=(n-1)a_2$.

解法二. 因 $(n-1)a_{n+1}=na_n$, $a_1=0$, $a_2\neq 0$, 故 $n\geq 3$ 时, $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n-2}$. 所以

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_3}{a_2}\cdot a_2=\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{2}{1}a_2=(n-1)a_2. \qquad \square$$

例2 设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n, 证明:

(1) 若 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$, 则 $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 若 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$, 则 $\{a_n\}$ 是等比数列.

解. 证法1. 因

$$2a_{n+1}=2S_{n+1}-2S_n=(n+1)(a_1+a_{n+1})-n(a_1+a_n),$$

故

$$a_1+(n-1)a_{n+1}=na_n.$$

由 $a_1+(n-1)a_{n+1}=na_n$, $a_1+na_{n+2}=(n+1)a_{n+1}$, 得 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$.

证法2. 由 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$, 知可由 a_1,a_2 确定 a_3. 一般地, 若 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ $(k\geq 2)$ 确定后, a_{k+1} 也是确定的, 所以数列由其前两项唯一确定. 若能找到一个数列, 满足 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$, 则这个数列即为所求. 而由 a_1,a_2 确定的等差数列 $\{a_n\}$ 就满足这一条件, 所以 $\{a_n\}$ 就是等差数列.

例3 已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n^2+n}$, 求 a_n.

解. 满足题意的 $\{a_n\}$ 是唯一确定的, 所以若能找到一个数列满足题设条件, 则其通项公式即为所求. 由

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\left(k-\frac{1}{n+1}\right)-\left(k-\frac{1}{n}\right),$$

知 $a_n=k-\dfrac{1}{n}$ 满足递推关系. 再由 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 得 $a_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n}$ 满足题中所有条件. □

例4 已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{2}{3}$, $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$. 求 a_n.

解. 由

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{k}{n+1}}{\frac{k}{n}}$$

$(k\neq 0)$, 知 $a_k=\dfrac{k}{n}$ 满足递推关系. 再由 $a_1=\dfrac{2}{3}$ 得 $a_n=\dfrac{2}{3n}$. □

例5 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 且满足 $nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$. 求 a_n.

解. 由 $nS_{n+1}=(n+3)S_n$, 得 $(n+1)S_{n+2}=(n+4)S_{n+1}$. 两式相减得

$$(n+1)S_{n+2}-nS_{n+1}=(n+4)S_{n+1}-(n+3)S_n$$

即 $(n+1)a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}$, 因此有

$$\frac{a_{n+2}}{(n+2)(n+3)}=\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

所以数列 $\{\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}\}$ 是常数列. 再由 $a_1=1$, $a_2=3$ 知 $\{\frac{a_n}{n(n+1)}\}$ 也是常数列. 所以

$$\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}.$$ □

例 6 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, 且 $3(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(n+2)a_n$. 求 a_n 及 S_n.

解. 由

$$3S_{n+1}=(n+3)a_{n+1}=(n+3)(S_{n+1}-S_n),$$

知 $nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$. 同上例, 可得 $a_n=n(n+1)$, $S_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$. □

例 7 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}=4a_n-3n+1$, 求 a_n.

解. 由

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\frac{a_n}{4^n}+\frac{-3n+1}{4^{n+1}}$$

得

$$\frac{a_{n+1}-(n+1)}{4^{n+1}}=\frac{a_n-n}{4^n},$$

所以 $\dfrac{a_n-n}{4^n}=\dfrac{1}{4}$. □

一般问题: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=b$, $a_{n+1}=pa_n+An+B$ $(p\neq 0)$, 求 a_n.

先得

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{An+B}{p^{n+1}},$$

再寻求常数 x,y 满足

$$\frac{a_{n+1}+x(n+1)+y}{p^{n+1}}=\frac{a_n+xn+y}{p^n},$$

得常数列 $\{\frac{a_n+xn+y}{p^n}\}$, 进而求出 a_n.

例 8 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n+\dfrac{n+1}{2^n}$, 求 a_n.

解. 由

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{2^n},$$

得

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}+\frac{1}{2^n}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{2^{n-1}},$$

故

$$\frac{a_n}{n}+\frac{1}{2^{n-1}}=2,$$

即

$$a_n=2n-\frac{n}{2^{n-1}}.$$ □

例 9 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$, $a_{n+1}=S_n+3^n$, 求 a_n.

解. 由 $a_{n+1}=S_n+3^n$, 得 $S_{n+1}-S_n=S_n+3^n$, 即

$$S_{n+1}=2S_n+3^n,$$

故

$$\frac{S_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{S_n}{2^n}-\frac{3^n}{2^n}.$$

因此

$$\frac{S_n}{2^n}-\frac{3^n}{2^n}=\frac{a_1-3}{2},$$

即

$$S_n=(a-3)2^{n-1}+3^n.$$

所以

$$a_n=\begin{cases}a, & n=1;\\ (a-3)2^{n-2}+2\cdot 3^{n-1}, & n\geq 2.\end{cases}$$ □

例 10 数列 $\{a_n\}$ 满足 $ba_n-2^n=(b-1)S_n$ $(b\neq 0,2)$, 求 a_n.

解. 易见 $a_1=2$, $a_{n+1}=ba_n+2^n$, 即

$$\frac{a_{n+1}}{b^{n+1}}=\frac{a_n}{b^n}+\frac{2^n}{b^{n+1}},$$

因此

$$\frac{a_{n+1}}{b^{n+1}}+\frac{1}{b-2}\Big(\frac{2}{b}\Big)^{n+1}=\frac{a_n}{b^n}+\frac{1}{b-2}\Big(\frac{2}{b}\Big)^n.$$

所以

$$\frac{a_n}{b^n}+\frac{1}{b-2}\Big(\frac{2}{b}\Big)^n=\frac{2(b-1)}{b(b-2)},$$

即 $a_n=\dfrac{1}{b-2}\big(2(b-1)b^{n-1}-2^n\big)$. □

例 11 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}$ $(n\in\mathbb{N}^+)$. 求 $\{a_n\}$.

解. 计算出 a_1,a_2,a_3,a_4. 容易归纳出 $a_n=\dfrac{1}{n}$. 又题设中的数列唯一存在, 而 $a_n=\dfrac{1}{n}$ 满足题设中所有条件, 故 $a_n=\dfrac{1}{n}$ 即为所求. □

例 12 已知 $k(1)=1$, $k(2)=2$, $k(n+2)=k(n)+2^{n+1}$. 求 $\{k(n)\}$ 的通项公式.

解. 设 $k(n+2)+x\cdot 2^{n+2}=k(n)+x\cdot 2^n$, 即

$$k(n+2)=k(n)-3x\cdot 2^n.$$

所以可选 $-3x=2$, 即 $x=-\dfrac{2}{3}$, 就得到

$$k(n+2)-\frac{2}{3}\cdot 2^{n+2}=k(n)-\frac{2}{3}\cdot 2^n,$$

故 $\left\{k(n)-\dfrac{2}{3}\cdot 2^n\right\}$ 是以 2 为周期的数列, 即 $-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\cdots$. 所以,

$$k(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(2^{n+1}-1), & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{3}(2^{n+1}-2), & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$ □

例 13 正数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}+a_n=\dfrac{n+1}{a_{n+1}-a_n}+2$. 求 a_n.

解. 由条件得

$$(a_{n+1}-1)+(a_n-1)=\frac{n+1}{(a_{n+1}-1)-(a_n-1)},$$

故

$$(a_{n+1}-1)^2-(a_n-1)^2=n+1,$$

累加可得 $a_n=1+\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}$. □

例 14 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=6$, $a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_n}{n+1}+n+2$, 求 a_n.

解. 由条件得 $(n+1)a_{n+1}-(n+2)a_n=(n+1)(n+2)$, 故

$$\frac{a_{n+1}}{n+2}-\frac{a_n}{n+1}=1.$$

因此 $a_n=(n+1)(n+2)$. □

例 15 若正数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $a_n+\dfrac{1}{a_n}=2S_n$, 则 $a_n=$________.

解. 由 $S_n-S_{n-1}+\dfrac{1}{S_n-S_{n-1}}=2S_n$, 得 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$ $(n\geq 2)$, 故

$$S_n^2=S_1^2+n-1=n,$$

所以 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$. □

例16 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+2}-(t+1)S_{n+1}+tS_n=0$, $a_1=t$, $a_2=t^2$, 求 a_n.

解. 由 $S_{n+2}-S_{n+1}=t(S_{n+1}-S_n)$, 得 $a_{n+2}=ta_{n+1}$.

再由 $a_1=t$, $a_2=t^2$, 还得 $a_{n+1}=ta_n$. 所以 $a_n=t^n$. □

例17 若 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$. 求 a_n.

解. 因

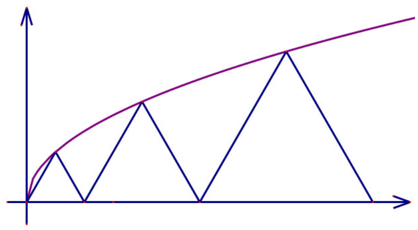
$$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}=\left(\frac{a_n-1}{a_n+1}\right)^2,$$

故令 $\dfrac{a_n-1}{a_n+1}=b_n$, 则 $b_n>0$, $\ln b_{n+1}=2\ln b_n$, $b_n=3^{-2^{n-1}}$, 所以

$$a_n=\frac{1+3^{-2^{n-1}}}{1-3^{-2^{n-1}}}.$$

□

例18 如图, $y=\sqrt{x}$ 下有一系列正三角形, 求第 n 个正三角形的边长 a_n.



解. 易见第 n 个正三角形的上顶点的坐标为 $\left(a_1+\cdots+a_{n-1}+\dfrac{a_n}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n\right)$, 故

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a_n=\sqrt{a_1+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}},$$

因此

$$\frac{3}{4}a_n^2=a_1+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}=S_n-\frac{a_n}{2}.$$

将 $\dfrac{3}{4}a_n^2+\dfrac{a_n}{2}=S_n$ 和 $\dfrac{3}{4}a_{n+1}^2+\dfrac{a_{n+1}}{2}=S_{n+1}$ 两式相减得

$$\frac{3}{4}(a_{n+1}^2-a_n^2)+\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1},$$

即

$$\frac{3}{4}(a_{n+1}^2-a_n^2)-\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)=0,$$

得 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2}{3}$. 而 $a_1=\dfrac{2}{3}$, 故 $a_n=\dfrac{2n}{3}$. □

例19 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3\cdot 5^n$, 求 a_n.

解. 解法1 (待定系数法) 设 x 为待定的常数, 由

$$a_{n+1}+x\cdot 5^{n+1}=2(a_n+\frac{5x+3}{2}\cdot 5^n),$$

令 $x=\dfrac{5x+3}{2}$, 解出 $x=-1$. 所以 $a_{n+1}-5^{n+1}=2(a_n-5^n)$. 因此

$$a_n-5^n=2^{n-1}(a_1-5)=-2^{n+1}.$$

解法2 (累加法) 首先有

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{3}{2}\cdot\Big(\frac{5}{2}\Big)^n.$$

设 $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$, 得

$$b_{n+1}-b_n=\frac{3}{2}\cdot\Big(\frac{5}{2}\Big)^n,$$

所以

$$\begin{aligned}b_n&=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1\\&=\frac{3}{2}\cdot\frac{5/2-(5/2)^n}{1-5/2}+\frac{1}{2}=\Big(\frac{5}{2}\Big)^n-2.\end{aligned}$$

解法3 (解方程组法) 因

$$a_{n+1}-5a_n=(2a_n+3\cdot 5^n)-5(2a_{n-1}+3\cdot 5^{n-1})=2(a_n-5a_{n-1}),$$

故

$$a_{n+1}-5a_n=2^{n-1}(a_2-5a_1)=3\cdot 2^{n+1},$$

得到方程组

$$\begin{cases}a_{n+1}-2a_n=3\cdot 5^n,\\a_{n+1}-5a_n=3\cdot 2^{n+1}.\end{cases}$$

解出 $a_n=5^n-2^{n+1}$. □

例20 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1=2$, $b_1=1$, 且当 $n\geq 2$ 时,

$$\begin{cases}a_n=\frac{3}{4}a_{n-1}+\frac{1}{4}b_{n-1},\\b_n=\frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{3}{4}b_{n-1}.\end{cases}$$

求 a_n, b_n.

解. $\lambda\neq -3$ 时,

$$a_n+\lambda b_n=\frac{3+\lambda}{4}\Big(a_{n-1}+\frac{1+3\lambda}{3+\lambda}b_{n-1}\Big).$$

令 $\lambda=\dfrac{1+3\lambda}{3+\lambda}$, 得 $\lambda=\pm 1$.

取 $\lambda=1$, 得 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$, 故 $a_n+b_n=a_1+b_1=3$.

取 $\lambda=-1$, 得 $a_n-b_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1})$, 故 $a_n-b_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}(a_1-b_1)=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

解方程组

$$\begin{cases} a_n+b_n=3, \\ a_n-b_n=\dfrac{1}{2^{n-1}} \end{cases}$$

得 $a_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2^n}$, $b_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2^n}$. □

例 21 已知 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1=2$, $b_1=1$, 且

$$\begin{cases} a_n=3a_{n-1}-b_{n-1}, \\ b_n=a_{n-1}+b_{n-1}, \end{cases} \qquad (n\geq 2)$$

求 a_n, b_n.

解. $\lambda\neq -3$ 时,

$$a_n+\lambda b_n=(\lambda+3)\Big(a_{n-1}+\frac{\lambda-1}{\lambda+3}b_{n-1}\Big).$$

令 $\lambda=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+3}$, 得 $\lambda=-1$. 于是

$$a_n-b_n=2(a_{n-1}-b_{n-1}),$$

所以 $a_n-b_n=2^{n-1}$, 且

$$a_n=3a_{n-1}-b_{n-1}=2a_{n-1}+(a_{n-1}-b_{n-1})=2a_{n-1}+2^{n-2}.$$

两边除以 2^n 得

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{4},$$

因此 $\dfrac{a_n}{2^n}=1+\dfrac{n-1}{4}$, 所以

$$a_n=(n+3)2^{n-2}, \qquad b_n=(n+1)2^{n-2}.$$

□

例 22 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1=2$, $b_1=1$, 且

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{3}{4}a_{n-1}+\dfrac{1}{4}b_{n-1}+1, \\ b_n=\dfrac{1}{4}a_{n-1}+\dfrac{3}{4}b_{n-1}+1, \end{cases} \qquad (n\geq 2)$$

求 a_n, b_n.

解. $\lambda\neq -3$ 时,

$$a_n+\lambda b_n+\mu=\frac{\lambda+3}{4}\Big(a_{n-1}+\frac{3\lambda+1}{\lambda+3}b_{n-1}+\frac{4\lambda+4\mu+4}{\lambda+3}\Big).$$

解方程组

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{3\lambda+1}{\lambda+3},\\ \mu=\dfrac{4\lambda+4\mu+4}{\lambda+3},\end{cases}$$

得 $\lambda=-1$, $\mu=0$, 故 $a_n-b_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1})=\dfrac{1}{2^{n-1}}$. 另一方面, 从递推关系可直接得到 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}+2=a_1+b_1+2(n-1)=2n+1$. 解方程组

$$\begin{cases}a_n+b_n=2n+1,\\ a_n-b_n=\dfrac{1}{2^{n-1}},\end{cases}$$

得 $a_n=n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^n}$, $b_n=n+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n}$. □

§ 6.3 数列与不动点

⋆⋆ 两个基本结论

1. $a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1},\ \ n\geq 2.$

   令 α,β 为相应的二次方程 $x^2-px-q=0$ (特征方程) 的两根,

   (1) 当 $\alpha\neq\beta$ 时,

$$a_n=A\alpha^n+B\beta^n,$$

   其中 A,B 由初始条件 a_1, a_2 所得的方程组

$$\begin{cases}A\alpha+B\beta=a_1\\ A\alpha^2+B\beta^2=a_2\end{cases}$$

   确定.

   (2) 当 $\alpha=\beta$ 时,

$$a_n=(A+Bn)\alpha^{n-1},$$

   其中 A,B 由初始条件 a_1, a_2 所得的方程组

$$\begin{cases}A+B=a_1\\ (A+2B)\alpha=a_2\end{cases}$$

   唯一确定.

2. $a_{n+1}=\dfrac{\alpha a_n+\beta}{a_n+\gamma}$.

先求 $x=\dfrac{\alpha x+\beta}{x+\gamma}$ 的解 x_1,x_2, 即 $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{x+\gamma}$ 的不动点.

若 $x_1\neq x_2$, 则 $\left\{\dfrac{a_n-x_1}{a_n-x_2}\right\}$ 是等比数列; 若 $x_1=x_2$, 则 $\left\{\dfrac{1}{a_n-x_{1,2}}\right\}$ 是等差数列.

例 1 设 $f_0=f_1=1$, $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, 求通项.

解. 特征方程 $x^2-x-1=0$, $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$, 故

$$f_n=A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n+B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

代入初始条件, 可得

$$\begin{cases}A+B=1,\\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot A+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot B=1,\end{cases}$$

解出 $A=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $B=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. 所以

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big).$$ □

例 2 设 $f(x)=ax+b$ $(a\neq 0,1)$, 且 $x_0=f(x_0)$, $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(a_{n-1})$, $n=2,3,\cdots$, 则 $\{a_n-x_0\}$ 是公比为 a 的等比数列.

解. 因 $ax_0+b=x_0$, $b-x_0=-ax_0$, 故

$$a_n-x_0=(a\cdot a_{n-1}+b)-x_0=a\cdot a_{n-1}-ax_0=a(a_{n-1}-x_0).$$ □

例 3 设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$, 且 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的**不动点**, $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(a_{n-1})$, $n=2,3,\cdots$.

(I) 若 $x_1\neq x_2$, 则 $\left\{\dfrac{a_n-x_1}{a_n-x_2}\right\}$ 是公比为 $\dfrac{a-x_1c}{a-x_2c}$ 的等比数列.

(II) 若 $x_1=x_2=x_0$, 则 $\left\{\dfrac{1}{a_n-x_0}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{2c}{a+d}$ 的等差数列.

解. (I) $\dfrac{ax_1+b}{cx_1+d}=x_1 \iff \dfrac{b-dx_1}{a-cx_1}=-x_1 \iff dx_1-b=(a-cx_1)x_1$.

同理, $dx_2-b=(a-cx_1)x_1$. 所以

$$\frac{a_{n+1}-x_1}{a_{n+1}-x_2}=\frac{\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}-x_1}{\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}-x_2}$$

$$= \frac{(a-cx_1)a_n+(b-dx_1)}{(a-cx_2)a_n+(b-dx_2)}$$
$$= \frac{a-cx_1}{a-cx_2}\cdot\frac{a_n-x_1}{a_n-x_2}.$$

(II) 方程 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ 的解是 $x_1=x_2=x_0$, 所以 $x_0=\dfrac{a-d}{2c}$, 且 $\dfrac{b-dx_0}{a-cx_0}=-x_0$, 故

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}-x_0} &= \frac{1}{\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}-x_0} = \frac{ca_n+d}{(a-cx_0)a_n+(b-dx_0)}\\ &= \frac{ca_n+d}{(a-cx_0)\left(a_n+\dfrac{b-dx_0}{a-cx_0}\right)} = \frac{ca_n+d}{(a-cx_0)(a_n-x_0)}\\ &= \frac{c(a_n-x_0)+(d+cx_0)}{(a-cx_0)(a_n-x_0)}\\ &= \frac{c}{a-cx_0}+\frac{d+cx_0}{a-cx_0}\cdot\frac{1}{a_n-x_0}\\ &= \frac{c}{a-c\cdot\dfrac{a-d}{2c}}+\frac{d+c\cdot\dfrac{a-d}{2c}}{a-c\cdot\dfrac{a-d}{2c}}\cdot\frac{1}{a_n-x_0}\\ &= \frac{1}{a_n-x_0}+\frac{2c}{a+d}.\end{aligned}$$ □

例4 设 $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{2ax+d}$ $(a\neq 0)$, x_1,x_2 是 $f(x)$ 的不动点, $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(a_{n-1})$, $n=2,3,\cdots$, 则 $\dfrac{a_{n+1}-x_1}{a_{n+1}-x_2}=\left(\dfrac{a_n-x_1}{a_n-x_2}\right)^2$.

解. 由 $dx_1=b-ax_1^2$, $dx_2=b-ax_2^2$, 得

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-x_1}{a_{n+1}-x_2} &= \frac{a\cdot a_n^2+b-(2a\cdot a_n+d)x_1}{a\cdot a_n^2+b-(2a\cdot a_n+d)x_2}\\ &= \frac{a\cdot a_n^2+b-2a\cdot a_nx_1-b+ax_1^2}{a\cdot a_n^2+b-2a\cdot a_nx_2-b+ax_2^2}\\ &= \left(\frac{a_n-x_1}{a_n-x_2}\right)^2.\end{aligned}$$ □

例5 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{3}$, 求通项.

解. **迭代函数**为 $f(x)=\dfrac{2x+1}{3}$. 令 $f(x)=x$, 得 $x=1$. 于是 $a_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(a_n-1)$. □

例6 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, $a_{n+1}=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}$, 求通项.

解. 迭代函数为 $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$. 令 $f(x)=x$, 得 $x_1=1$, $x_2=2$, 以及

$$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-2}=\frac{\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}-1}{\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}-2}=\frac{4a_n-2-(a_n+1)}{4a_n-2-2(a_n+1)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n-1}{a_n-2},$$

所以

$$\frac{a_n-1}{a_n-2}=\frac{a_1-1}{a_1-2}\Big(\frac{3}{2}\Big)^{n-1}=2\Big(\frac{3}{2}\Big)^{n-1},$$

得

$$a_n=\frac{2^{n-2}-2\cdot 3^{n-1}}{2^{n-2}-3^{n-1}}.$$ □

例 7 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且满足条件: $x^2-a_n\cdot x-a_n=0$ 有一根为 S_n-1. 求 $\{a_n\}$ 的通项.

解. $a_1=1$, 且 $(S_n-1)^2-a_n(S_n-1)-a_n=0$. 将 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 代入上式, 得

$$S_n=\frac{1}{2-S_{n-1}}.$$

记 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$. 令 $f(x)=x$, 得不动点 $x_0=1$. 直接计算有

$$\frac{1}{S_{n+1}-1}=\frac{1}{\dfrac{1}{2-S_n}-1}=\frac{2-S_n}{S_n-1}=\frac{1}{S_n-1}-1,$$

所以 $S_n=\dfrac{n}{n+1}$, $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$. □

例 8 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=4$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2-3}{2x_n-4}$, 求通项公式.

解. 令 $\dfrac{x^2-3}{2x-4}=x$, 得 $x_1=1$, $x_2=3$,

$$x_{n+1}-1=\frac{x_n^2-3}{2x_n-4}-1=\frac{(x_n-1)^2}{2x_n-4},$$
$$x_{n+1}-3=\frac{x_n^2-3}{2x_n-4}-3=\frac{(x_n-3)^2}{2x_n-4},$$

故

$$\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}-3}=\Big(\frac{x_n-1}{x_n-3}\Big)^2.$$

又 $\dfrac{x_1-1}{x_1-3}=3$, 所以

$$\log_3\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}-3}=2\log_3\frac{x_n-1}{x_n-3}.$$

令 $a_n=\log_3\dfrac{x_n-1}{x_n-3}$, 则 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 故 $a_n=2^{n-1}$, 即 $\dfrac{x_n-1}{x_n-3}=3^{2^{n-1}}$, 所以 $x_n=\dfrac{3^{2^{n-1}+1}-1}{3^{2^{n-1}}-1}$. □

例 9 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$, 求通项.

解. 令 $x=\dfrac{2x}{x+2}$, 得 $x_1=x_2=0$. 设 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$, 则由 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$ 可得

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}.$$

因 $\{b_n\}$ 首项为 1, 公差为 $\dfrac12$, 于是

$$b_n=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2},$$

由此得 $a_n=\dfrac{2}{n+1}$. □

例 10 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $S_{n+1}=4a_n+2$, 求 a_{2013}.

解. $n\geq 2$ 时, $S_{n+1}=4a_n+2$, $S_n=4a_{n-1}+2$, 故

$$a_{n+1}=4(a_n-a_{n-1}).$$

特征方程为 $x^2-4x+4=0$, 故 $x_1=x_2=2$, 因此

$$a_n=(An+B)\cdot 2^{n-1}.$$

由已知 $a_2=5$, 所以

$$\begin{cases}A+B=1,\\ 2(2A+B)=5,\end{cases}$$

解出 $A=\dfrac32$, $B=-\dfrac12$, 故 $a_n=\dfrac{3n-1}{2}\cdot 2^{n-1}$. □

例 11 $\{a_n\}$ 定义如下: $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+6}{a_n+1}$, 求通项.

解. 先求出不动点. 令 $x=\dfrac{2x+6}{x+1}$, 解出 $x_1=3$, $x_2=-2$. 由

$$a_{n+1}-3=\frac{2a_n+6}{a_n+1}-3=-\frac{a_n-3}{a_n+1},$$

$$a_{n+1}+2=\frac{2a_n+6}{a_n+1}+2=\frac{4(a_n+2)}{a_n+1},$$

两式相除得

$$\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+2}=-\frac14\cdot\frac{a_n-3}{a_n+2},$$

故

$$\frac{a_n-3}{a_n+2}=\Big(-\frac14\Big)^{n-1}\frac{a_1-3}{a_1+2}=\Big(-\frac14\Big)^{n},$$

所以

$$a_n = \frac{3(-4)^n + 2}{(-4)^n - 1}. \qquad \square$$

§ 6.4 数列与不等式

例1 已知 A 是由定义在 $[2,4]$ 上且满足以下条件的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合: (i) 对任意的 $x \in [1,2]$ 都有 $\varphi(2x) \in (1,2)$; (ii) 存在常数 L $(0 < L < 1)$, 使得对任意的 $x_1, x_2 \in [1,2]$ 都有 $|\varphi(2x_1) - \varphi(2x_2)| \le L|x_1 - x_2|$.

(1) 设 $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x \in [2,4]$, 求证: $\varphi(x) \in A$.

(2) 设 $\varphi(x) \in A$, 如果存在 $x_0 \in (1,2)$, 使得 $x_0 = \varphi(2x_0)$, 求证这样的 x_0 是唯一的.

(3) 设 $\varphi(x) \in A$. 任取 $x_1 \in (1,2)$, 令 $x_{n+1} = \varphi(2x_n)$, $n = 1, 2, \cdots$. 求证: 对任意的正整数 k, p, 不等式 $|x_{k+p} - x_k| \le \dfrac{L^{k-1}}{1-L}|x_2 - x_1|$ 成立.

解. (1) 因 $\sqrt[3]{3} \le \varphi(2x) \le \sqrt[3]{5}$, 故 $\varphi(2x) \in (1,2)$.

$$\begin{aligned}|\varphi(2x_1) - \varphi(2x_2)| &= |\sqrt[3]{1+2x_1} - \sqrt[3]{1+2x_2}| \\ &= \frac{2|x_1 - x_2|}{(1+2x_1)^{2/3} + (1+2x_2)^{2/3} + (1+2x_1)^{1/3}(1+2x_2)^{1/3}} \\ &< \frac{2}{3}|x_1 - x_2|.\end{aligned}$$

(2) 假设存在 $x_1, x_2 \in (1,2)$ 使得 $x_1 = \varphi(2x_1)$, $x_2 = \varphi(2x_2)$. 因

$$|x_1 - x_2| = |\varphi(2x_1) - \varphi(2x_2)| \le L|x_1 - x_2|,$$

故 $(1-L)|x_1 - x_2| \le 0$, 因此 $|x_1 - x_2| \le 0$, 即 $x_1 = x_2$.

(3) 因

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(2x_n) - \varphi(2x_{n-1})| \le L|x_n - x_{n-1}|,$$

故

$$|x_{n+1} - x_n| \le L|x_n - x_{n-1}| \le L^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \le \cdots \le L^{n-1}|x_2 - x_1|,$$

因此

$$|x_{k+p} - x_k| \le |(x_{k+p} - x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1} - x_{k+p-2}) + \cdots + (x_{k+1} - x_k)|$$

$$
\begin{aligned}
&\le |x_{k+p}-x_{k+p-1}|+|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}|+\cdots+|x_{k+1}-x_k|\\
&\le (L^{k+p-2}+L^{k+p-3}+\cdots+L^{k-1})|x_2-x_1|\\
&=\frac{L^{k-1}(1-L^{k+p-1})}{1-L}|x_2-x_1|\\
&\le \frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|.
\end{aligned}
$$

□

例 2 已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$, $a_{n+1}=np^n+qa_n$.

(1) 若 $q=1$, 求 a_n.

(2) 若 $|p|<1$, $|q|<1$, 求证: $\{a_n\}$ 有界.

解. (1) 当 $q=1$ 时, $a_{n+1}-a_n=np^n$, 因此

$$a_n=p+2p^2+3p^3+(n-1)p^{n-1}.$$

$p=1$ 时, $a_n=1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

$p\ne 1$ 时, 因 $pa_n=p^2+2p^3+3p^4+\cdots+(n-1)p^n$, 故

$$
\begin{aligned}
(1-p)a_n&=p+p^2+\cdots+p^{n-1}-(n-1)p^n\\
&=\frac{p-p^n}{1-p}-(n-1)p^n,
\end{aligned}
$$

所以

$$a_n=\frac{p-p^n}{(1-p)^2}-\frac{(n-1)p^n}{1-p}.$$

(2) 由

$$|a_{n+1}|\le n|p|^n+q|a_n|\le n|p|^n+|a_n|,$$

得

$$|a_{n+1}|-|a_n|\le n|p|^n.$$

累加并注意到 $a_1=0$, 再利用 (1) 的结论, 就有

$$
\begin{aligned}
|a_n|&\le 1\cdot|p|^1+2\cdot|p|^2+\cdots+(n-1)\cdot|p|^{n-1}\\
&=\frac{|p|-|p|^n}{(1-|p|)^2}-\frac{(n-1)|p|^n}{1-|p|}\\
&\le\frac{|p|-|p|^n}{(1-|p|)^2}\\
&<\frac{|p|}{(1-|p|)^2}.
\end{aligned}
$$

□

例3 正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2\ (c>0)$.

(1) 求证: 对任意的 $M>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $a_n>M$.

(2) 设 $b_n=\dfrac{1}{1+ca_n}$, S_n 是 b_n 的前 n 项和, 求证: 对任意的 $d>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, $0<\left|S_n-\dfrac{1}{ca_1}\right|<d$.

解. 由 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2>a_n$ 知 $\{a_n\}$ 严格递增, 因此

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\\&=a_1+ca_1^2+ca_2^2+\cdots+ca_{n-1}^2\\&\geq a_1+(n-1)ca_1^2>(n-1)ca_1^2.\end{aligned}$$

对任意的 $M>0$, 取 $N=\left[\dfrac{M}{ca_1^2}\right]+2$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}a_n>a_N&>(N-1)ca_1^2\\&=\left(\left[\frac{M}{ca_1^2}\right]+1\right)ca_1^2\\&>\frac{M}{ca_1^2}\cdot ca_1^2=M.\end{aligned}$$

(2) 由 $a_{n+1}=a_n(1+ca_n)$, 得

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{1+ca_n}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{ca_n^2}{ca_na_{n+1}}\\&=\frac{a_{n+1}-a_n}{ca_na_{n+1}}=\frac{1}{ca_n}-\frac{1}{ca_{n+1}},\end{aligned}$$

故

$$S_n=\frac{1}{ca_1}-\frac{1}{ca_{n+1}},$$

因此

$$\left|S_n-\frac{1}{ca_1}\right|=\frac{1}{ca_{n+1}}>0.$$

由 (1) 有 $a_{n+1}>nca_1^2$, 故 $\dfrac{1}{ca_{n+1}}<\dfrac{1}{nc^2a_1^2}$.

对任意的 $d>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{dc^2a_1^2}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时,

$$\begin{aligned}\left|S_n-\frac{1}{ca_1}\right|&=\frac{1}{ca_{n+1}}<\frac{1}{nc^2a_1^2}<\frac{1}{Nc^2a_1^2}\\&=\frac{1}{\left(\left[\frac{1}{dc^2a_1^2}\right]+1\right)c^2a_1^2}<d.\end{aligned}$$

□

例 4 定义 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$, 又设

$$S_n=f\Big(\frac{1}{n}\Big)+f\Big(\frac{2}{n}\Big)+\cdots+f\Big(\frac{n-1}{n}\Big),\quad (n=2,3,\cdots).$$

(1) 求 S_n.

(2) 是否存在常数 M 使得对任意的 $n\ge 2$ 都有 $\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}\le M$?

解. (1) 因对任意的 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 都有

$$\begin{aligned}f\Big(\frac{k}{n}\Big)+f\Big(\frac{n-k}{n}\Big)&=\frac{4^{\frac{k}{n}}}{4^{\frac{k}{n}}+2}+\frac{4^{\frac{n-k}{n}}}{4^{\frac{n-k}{n}}+2}\\&=\frac{4^{\frac{k}{n}}}{4^{\frac{k}{n}}+2}+\frac{4}{2\cdot 4^{\frac{k}{n}}+4}=1,\end{aligned}$$

故 $2S_n=n-1$, $S_n=\dfrac{n-1}{2}$.

(2) 由 (1) 知

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{S_k}=2\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Big).$$

取 $n=2^m$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{S_k}&>2\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^m}\Big)\\&=2\Big(1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{m\text{个}}\Big)=m+2.\end{aligned}$$

故对任意的 M, 都存在 $n\ge 2$ (例如可取 $n=2^{[|M|]+2}$) 使得 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{S_k}>M$, 因此, 不存在常数 M 使得对任意的 $n\ge 2$ 都有 $\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}\le M$. □

例 5 已知 $a_k=\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$, 求 S_{100}.

解. 因为

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{k+2}{k!(k^2+4k+4)}\\&=\frac{1}{k!(k+2)}=\frac{k+1}{(k+2)!}\\&=\frac{(k+2)-1}{(k+2)!}=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!},\end{aligned}$$

所以 $S_{100}=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{102!}$. □

参 考 文 献

[1] 李胜宏，李名德，高中数学竞赛培优教程，浙江大学出版社，2018 年 1 月第 32 次印刷

[2] 朱华伟，程汉波，函数与函数思想，中国科学技术大学出版社 2018 年 5 月第 2 次印刷

[3] 朱尧辰，怎样证明三角恒等式，中国科学技术大学出版社，2014 年 1 月第 2 次印刷

[4] 金蒙伟，李胜宏，从自主招生到竞赛数学上下册，浙江大学出版社，2017 年 10 月第 10 次印刷

[5] 甘志国，三角与平面向量，哈尔冰工业大学出版报社，2015 年 4 月第 2 次印刷

[6] 甘志国，立体几何与组合，哈尔冰工业大学出版报社，2015 年 4 月第 2 次印刷

[7] 甘志国，集合，函数与方程，哈尔冰工业大学出版报社，2015 年 4 月第 2 次印刷

[8] 甘志国，高中数学题典——不等式，推理与证明，哈尔冰工业大学出版报社，2018 年 1 月第 2 次印刷

[9] 蔡小雄，更高更妙的高中数学思想与方法，浙江大学出版社，2013 年 1 月第 13 次印刷

[10] 范端喜，名校自主招生数学标准教程，北京大学出版社，2018 年 10 月第 1 次印刷

[11] 范端喜，名校自主招生数学标准教程习题解答，北京大学出版社，2018 年 10 月第 1 次印刷

[12] 梁开华，高中数学综合性问题，上海大学出版社，2012 年 1 月第 1 次印刷

[13] 张雪明，高校自主招生考试直通车（数学），上海交通大学出版社，2018 年 4 月第 22 次印刷

[14] 甘志国，重点大学自主招生数学备考用书，中国科学技术大学出版社，2019 年 1 月第 4 次印刷

[15] 甘志国，自主招生，哈尔冰工业大学出版社，2014 年 5 月第 1 次印刷

[16] 单墫，三角函数，中国科学技术大学出版社，2018 年 4 月第 2 次印刷