5.(15分) 设$A \subset \mathbb{R}$，$A \neq \varnothing$。记

$$d(x)=\inf\{|x-y|;y\in A\},\quad x\in\mathbb{R}$$

设 $x_0 \in \mathbb{R}$，$d(x_0)>0$。证明：如果 d 在 x_0 点可导，则 $|d'(x_0)|=1$。

证明：

设 $d(x_0)=\inf\{|x_0-y|;y\in A\}=|x_0-y_0|$

下证 y_0 是唯一的，采取反证法

设 $\exists|x_0-y_1|=|x_0-y_0|$，考虑两种情况：

- y_0 与 y_1 位于 x_0 同侧，则 $|x_0-y_0|=|x_0-y_1|$，即 $y_0=y_1$ 矛盾
- y_0 与 y_1 位于 x_0 异侧，不妨设 $y_0<x_0<y_1$ ，则 $x_0-y_0=y_1-x_0=d(x_0)$ ，$(y_0,y_1)\cap A=\varnothing$，现表示在 x_0 的左右导数（推出第二个等于用到了保号性）

$$\lim_{h\to 0+}=\frac{d(x_0+h)-d(x_0)}{h}=\frac{(y_1-x_0-h)-(y_1-x_0)}{h}=-1$$

$$\lim_{h\to 0-}=\frac{d(x_0+h)-d(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h-y_0)-(x_0-y_0)}{h}=1$$

此时左右导数不相等，则此点不可导，与条件矛盾，故 y_0 是唯一的

设 $D(x_0)=\inf\{|x_0-y|;y\in A,y\neq y_0\}$，则 $D(x_0)>d(x_0)$，设 $\epsilon_0=\frac{D(x_0)-d(x_0)}{2}$，

设 $h\in\mathbb{R},|h|<\epsilon_0,z\in A,z\neq y_0$ 则有如下不等式

$$|x_0+h-y|\geq|x_0-y|-|h|>D(x_0)-\epsilon_0=d(x_0)+\epsilon_0>d(x_0)+|h|\geq|x_0-y_0+h|$$

所以，$d(x_0+h)=|x_0-y_0+h|$，这是我们证明的关键，代入得（推出等于1用到了保号性）

$$|d'(x_0)|=\left|\lim_{h\to 0}\frac{d(x_0+h)-d(x_0)}{h}\right|=\left|\lim_{h\to 0}\frac{|x_0+h-y_0|-|x_0-y_0|}{h}\right|=1$$

证毕。

如果和课堂知识结合一下的话，还可以证明如下命题：

- d 在 x_0 点可导的充分必要条件是 x_0 不是 A 的聚点

8.(15分) 设 $a_{ij}\in\mathbb{R}$，$a_{ij}\geq 0$，$i,j=1,2,\cdots$。设对于任意的 $i=1,2,\cdots$，级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛，并且级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$ 收敛，证明：对于任意的 $j=1,2,\cdots$，级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛，级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$ 收敛，并且 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$。

证明：

Step 1 证明对任意 j，级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛

对任意固定的 j，考虑部分和 $\sum_{i=1}^{N}a_{ij}$。由于 $a_{ij}\geq 0$，该序列单调不减。对任意正整数 M 和 N，有

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}a_{ij}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}a_{ij}\leq\sum_{i=1}^{N}s_i\leq S.$$

固定 M，令 $N\to+\infty$，则 $\sum_{i=1}^{N}a_{ij}$ 单调收敛到某极限（有限或 $+\infty$），记为

$$T_j=\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}.$$

由单调收敛定理，

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}a_{ij}\to\sum_{j=1}^{M}T_j\quad(N\to+\infty).$$

由不等式 $\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}a_{ij}\leq S$ 对所有 N 成立，得

$$\sum_{j=1}^{M}T_j\leq S.$$

此不等式对任意 M 成立，且 $T_j\geq 0$，故级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}T_j$ 的部分和有上界 S，因此

$$\sum_{j=1}^{+\infty}T_j\leq S<+\infty,$$

且对每个 j，$T_j<+\infty$，即级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛。

Step 2 证明级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$ 收敛且等于 S

由步骤 1，$\sum_{j=1}^{+\infty}T_j\leq S<+\infty$，故级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}T_j$ 收敛。下证其等于 S。

对任意 $\epsilon>0$，由于 $\sum_{i=1}^{+\infty}s_i=S$，存在正整数 N_0 使得

$$\sum_{i=1}^{N_0}s_i>S-\epsilon.$$

对每个 $i=1,\ldots,N_0$，存在正整数 M_i 使得

$$\sum_{j=1}^{M_i}a_{ij}>s_i-\frac{\epsilon}{N_0}.$$

令 $M=\max_{1\le i\le N_0} M_i$，则对每个 $i=1,\dots,N_0$，

$$\sum_{j=1}^{M} a_{ij} > s_i - \frac{\epsilon}{N_0}.$$

（上面这个估计是关键的）因此，

$$\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{M} a_{ij} > \sum_{i=1}^{N_0}\left(s_i-\frac{\epsilon}{N_0}\right) = \sum_{i=1}^{N_0} s_i - \epsilon > (S-\epsilon)-\epsilon = S-2\epsilon.$$

又

$$\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{M} a_{ij} = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_0} a_{ij} \le \sum_{j=1}^{M} T_j \le \sum_{j=1}^{+\infty} T_j.$$

故

$$\sum_{j=1}^{+\infty} T_j > S-2\epsilon.$$

由 $\epsilon>0$ 任意性，得 $\sum_{j=1}^{+\infty} T_j \ge S$。结合步骤 1 中 $\sum_{j=1}^{+\infty} T_j \le S$，有

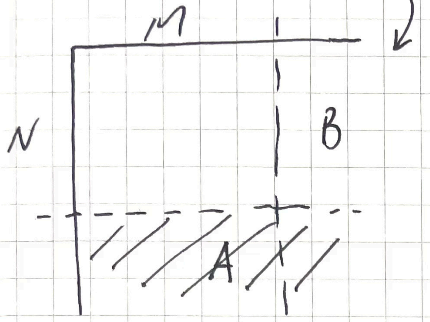
$$\sum_{j=1}^{+\infty} T_j = S.$$

即

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij}\right).$$

证明的思路:

a_{ij} 可构成一个无穷矩阵（列表）



而A矩阵同样是在2个方向上都无限，（1个方向会好处理）

题中级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij})$ 收敛很关键，用柯西原理

我们可以知道 $A<\varepsilon$.

再根据 $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ 收敛，B区域的"无限"也可被很好地估计

我们知道每一行可以任意小，而B区域的行数有限，

ε 和 $N\varepsilon$ 在本质上没有区别

$B<N\varepsilon$，等价于 $B<\varepsilon$

而这个矩阵去掉A，B后是N行M列的，运算律

（加法交换/结合）可以随意使用，自然相等。